ИЮНЬ

ISSN 0130-2221
2017 · № 6

КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

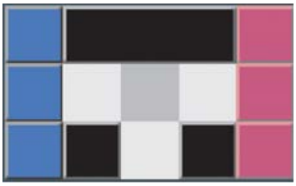
ШЕСТЬ КВАДРАТОВ

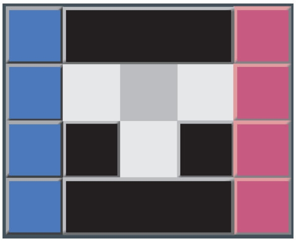
В этой головоломке требуется поменять местами три синих и три красных квадрата за 17 ходов. При этом вынимать квадраты из коробки нельзя, можно лишь двигать их по соединяющему левую и правую половины поля «каналу» (*показан серым на схемах*). У автора сохранился, можно сказать, раритетный экземпляр этой головоломки, выполненный из пластика. Но сделать такую головоломку самостоятельно можно гораздо проще: достаточно нарисовать контуры поля на клетчатой бумаге, а квадраты вырезать из цветной бумаги (черным на схемах показаны фиксированные части рамки этой головоломки, которые ограничивают игровое поле). Ходом считается одно или несколько передвижений одного квадрата, между которыми не двигались другие квадраты.

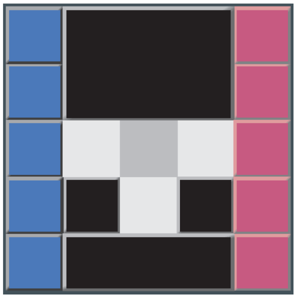
Головоломку можно обобщить: форма «канала» остается прежней, но меняется число квадратов, которые надо менять местами. Варианты с двумя и четырьмя квадратами совсем простые. Гораздо интереснее случаи с 8, 10 и 12 квадратами. Их решения требуют 30, 43 и 60 ходов соответственно. Найдите их.

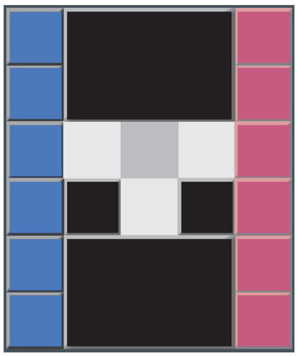
Вариант с 14 квадратами также имеет решение, минимальное количество ходов для них равно 77.

А если квадратов будет еще больше, то при такой форме «канала» их уже нельзя будет поменять местами.









В.Журавлев

КВАНТ ИЮНЬ 2017 №6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

Памяти Алексея Алексеевича Абрикосова

Совсем недавно, 29 марта 2017 года, не стало выдающегося физика-теоретика, лауреата Нобелевской, Ленинской, Государственной и многих других премий, члена Российской академии наук и Национальной академии наук США, члена Лондонского Королевского общества, почетного доктора десятка университетов, многолетнего члена редакционной коллегии серии книг «Библиотечка «Квант», автора и друга журнала «Квант» Алексея Алексеевича Абрикосова. С его именем связаны многие открытия теории конденсированных сред и квантовой электродинамики, однако в историю науки А.А.Абрикосов вошел, в первую очередь, как создатель теории сверхпроводимости второго рода.

Помимо огромного научного таланта Алексей Алексеевич обладал блестящим даром педагога. Сотни ученых помнят его великолепные по глубине понимания предмета и кристальной ясности изложения лекции, посвященные теории нормальных металлов и сверхпроводимости. Его перу принадлежат ставшие классическими монографии «Методы квантовой теории поля в статистической физике» (написана в соавторстве с Л.П.Горьковым и И.Е.Дзялошинским) и «Основы теории металлов».

Двум нашим коллегам – ученому секретарю «Библиотечки «Квант» (с 1986 по 1994 г.) А.И.Буздину и члену редколлегии «Кванта», заместителю главного редактора журнала (с 1986 по 1992 г.) А.А.Варламову – посчастливилось работать с академиком А.А.Абрикосовым. Поэтому публикацию статьи А.А.Абрикосова, посвященной явлению сверхпроводимости, мы предвосхищаем их воспоминаниями об учителе.

А.И.Буздин, *профессор, доктор физико-математических наук, руководитель отдела теории конденсированных сред в Университете Бордо, Франция*

Алексей Алексеевич Абрикосов обладал воистину энциклопедическими знаниями по многим областям. К примеру, он очень любил котов и знал о них абсолютно все (в шутку его называли «академик по котам» – по книжке Б.Заходера «Кит и Кот»). В доме А.А. обычно жил породистый кот, который занимал очень важную позицию в семейной иерархии и с которым у А.А. были особые отношения.

Следуя традиции школы Ландау, А.А. уделял большое внимание научным семинарам, где он всегда активно участвовал в дискуссиях и задавал вопросы, помогающие понять суть излагаемого. Его присутствие превращало семинар в своего рода праздник – если по каким-либо причинам он не мог придти, то это лишало присутствующих половины удовольствия. Запомнилось «правило Абрикосова» (а может быть, «правило Ландау»?): первая часть доклада должна быть предельно простой – чтобы присутствующие почувствовали, что они вовсе не дураки, а вторая часть должна быть довольно сложной – чтобы присутствующие поняли, что и докладчик не дурак.

Однажды я рассказывал свою работу на семинаре у А.А., и в результате завязалась оживленная дискуссия, которая выявила много новых интересных вопросов. После семинара я осторожно поинтересовался (через наших общих знакомых), не согласится ли А.А. быть оппонентом по моей докторской диссертации, и был очень рад, когда получил его согласие. В то время было принято, чтобы еще задолго до защиты диссертант детально ответил на вопросы, которые возникли у оппонента при первом чтении рукописи. Обычно такая обстоятельная, глубокая и вдумчивая беседа проходила дома у оппонента. Так было и в моем случае с А.А. Я приехал к нему утром, и мы просидели с ним до вечера. А.А. вникал не только в саму суть работы, но и в мельчайшие детали: как


А.И.Буздин, А.А.Абрикосов, А.А.Варламов

соотносятся между собой разные предельные случаи, каковы имеющиеся экспериментальные данные и т.п. В результате значительно улучшился текст моей диссертации и был сформулирован ряд задач, которые затем вылились в отдельные исследования (часть из них мы выполнили вместе с А.А.). Когда А.А. стал директором Института физики высоких давлений РАН, он пригласил меня работать в теоретическом отделе этого института.

В конце сентября 2003 года А.А. приехал в Бордо на церемонию присвоения ему звания Почетного доктора Университета Бордо. Когда я представлял его, то среди прочего упомянул, что у А.А. много разных премий и научных наград и, пожалуй, не хватает лишь Нобелевской премии. Как же мы все обрадовались, когда через две недели Нобелевский комитет объявил о присуждении Нобелевской премии 2003 года по физике А.А.Абрикосову, В.Л.Гинзбургу и Э.Леггету. Мне посчастливилось быть гостем Абрикосова на Нобелевской неделе и, в частности, наблюдать, как А.А. в течение всего торжественного банкета с большим успехом демонстрировал младшей принцессе королевской семьи свой дар непревзойденного рассказчика.

Несмотря на тот огромный вклад, который А.А. внес в разные области физики, он считал, что по-настоящему хорошие идеи приходят в голову редко и надо их уметь ценить. Поэтому он не любил, когда кто-нибудь его спрашивал, какой проблемой ему следовало бы заняться. «Почему я буду ему это говорить? Если у меня есть интересная задача, я ее решу сам, – А.А. немного подумал и добавил. – Пожалуй, я не припомню, чтобы я не смог решить какой-нибудь четко сформулированной задачи. Просто иногда это занимало больше времени. Но в конце концов я всегда находил решение».

Алексей Алексеевич был редчайшей личностью – волею судеб он выбрал физику как сферу своей деятельности, но если бы это была другая область науки, то он и в ней достиг бы выдающихся результатов.

А.А.Варламов, *профессор, доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Института сверхпроводимости и инновационных материалов, Италия*

С Алексеем Алексеевичем Абрикосовым у меня связаны почти полвека жизни. Будучи студентом четвертого курса Физтеха, мне повезло стать его учеником. Затем была аспирантура, после защиты кандидатской я стал его сотрудникам, затем – соавтором и, надеюсь, другом. Я учился теоретической физике по его книгам, по ним же учил и учу студентов сегодня; повторяя выкладки из классических работ А.А., учился мастерству, он же учил меня писать научные статьи. Кроме строго определенной структуры изложения, А.А. всегда требовал, чтобы статья завершалась формулой, которая может быть проверена экспериментально. В то же время ссылки на совпадение теоретических результатов с экспериментальными данными для него не являлись аргументом в пользу их правильности: теоретическая работа должна была быть строго выверена согласно канонам школы Ландау.

Когда в 70–80-е годы Алексей Алексеевич появлялся на заседании кафедры теоретической физики на седьмом этаже главного корпуса МИСиСа, он быстро разбирался с текущими делами и начиналось самое интересное – А.А. пускался в рассказы. Он был блестящим рассказчиком, которого можно было слушать часами. Казалось, мир большой физики открывался за пыльным окном, за которым только что шумел Ленинский проспект. Разговоры о физике были неотъемлемой частью нашего общения с А.А. и в холле Института физических проблем, где он традиционно назначал встречи своим студентам, и с лыжами в руках в очереди на подъемник в Бакуриани, где проходили зимние симпозиумы по физике низких температур, и на пляже во время одесских конференций по теоретической физике. Из этих разговоров, из прослушанных докладов рождались новые задачи.

Алексей Алексеевич всегда был чрезвычайно внимателен к эксперименту и имел удивительное чутье на новые явления. Так, после доклада французского экспериментатора Дени Джерома об удивительных свойствах только что синтезированных органических сверхпроводников, А.А. посоветовал мне заняться исследованием природы наблюдаемой в них псевдощели. Это послужило основой для цикла работ, пригодившихся впоследствии и при изучении свойств высокотемпературных сверхпроводников. После доклада на бакурианском симпозиуме экспериментатора из Курчатовского института Валерия Егорова, посвященного аномальным транспортным свойствам сплавов $\mathrm{Li}_{1-x}\mathrm{Mg}_x$ при низких температурах, А.А. обратил мое внимание на противоречия в существующем теоретическом понимании этих явлений. В результате была развита теория переходов Лифшица в сплавах при конечных температурах. Интерес к этой деятельности в связи с исследованием новых сверхпроводящих материалов, систем тяжелых фермионов, модификаций графена не иссякает и сегодня.

Нужно отметить, что сам А.А., если он лично не проделал соответствующих вычислений, никогда не подписывал работу, сделанную по его идее.

В 1993 году мы с А.И.Буздиным работали в теоретическом отделе Аргонской национальной лаборатории, который в то время возглавлял А.А.Абрикосов. Это было время интенсивных исследований высокотемпературных сверхпроводников, в которых все мы активно принимали участие. А.А. часто заходил к нам в кабинет и начинал обсуждать их необычные, противоречащие сложившимся представлениям традиционной теории сверхпроводимости свойства. И вновь все окружающее нас – серая военного образца годов атомного проекта мебель, освещенные неоновыми лампами стены – уходило вдаль: благодаря силе таланта и красноречию Алексея Алексеевича мы попадали в мир вихрей его имени и куперовских пар, резонансного туннелирования электронов и особенностей ван Хова, в мир, в котором он жил и был счастлив.

Мы перепечатываем статью А.А.Абрикосова, опубликованную в журнале «Квант» почти 30 лет назад, в 1988 году. Эта дата замечательна по двум причинам: во-первых, публикация была посвящена шестидесятилетию Алексея Алексеевича, а во-вторых, примерно в то же время началась новая эра в исследованиях сверхпроводимости – эра высокотемпературных сверхпроводников. Статья представляет прекрасный обзор истории изучения сверхпроводимости, написанный одним из непосредственных создателей этой науки. В конце статьи автор делится своим видением только что открытого феномена высокотемпературной сверхпроводимости. Он прекрасно резюмирует события первого, важнейшего года этих исследований. За последующие 29 лет в сотнях лабораторий по всему миру были открыты тысячи новых сверхпроводящих веществ, критическая температура была повышена до 165 К. Однако единственной общепризнанной теории явления сверхпроводимости не существует и сегодня.

Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи

А.АБРИКОСОВ

Явление сверхпроводимости было открыто голландским физиком Камерлинг-Оннесом в 1911 году. Камерлинг-Оннесу первому удалось получить жидкий гелий, и он использовал его для создания криостатов – приборов, в которых можно поддерживать очень низкую температуру. В частности, он решил проверить правильность существовавших в то время представлений о поведении электрического сопротивления при низких температурах. Измеряя сопротивление ртути, Камерлинг-Оннес обнаружил, что оно скачком обращается в ноль при температуре около 4 К. Это явление было названо сверхпроводимостью, а температура перехода в сверхпроводящее состояние – критической. В настоящее время известно много сверхпроводников с самыми разными критическими температурами, от долей градуса до примерно 100 К. Но о последних я скажу позже.

Последующие исследования сверхпроводников позволили обнаружить многие их замечательные свойства. Так, оказалось, что сверхпроводимость разрушается магнитным полем. Критическое поле, при котором это происходит, зависит от температуры. Далее обнаружилось, что сверхпроводимость исчезает и в том случае, когда по образцу пропускают достаточно большой ток. Наконец, был обнаружен так называемый эффект Мейснера, суть которого заключается в следующем. Если поместить металл в не очень сильное магнитное поле и понижать температуру, то при переходе металла в сверхпроводящее состояние линии поля вытолкнутся из него. Последующее изучение показало, что на самом деле при таком переходе у поверхности сверхпроводника возникает небольшой слой, толщиной $10^{-5}-10^{-6}$ см, в котором циркулируют токи, полностью экранирующие внутренние области образца от внешнего поля. Толщина этого слоя называется глубиной проникновения.

Я не буду перечислять все факты, свидетельствующие о свойствах сверхпроводников. Их было обнаружено много. Но, тем не менее, само явление оставалось таинственным. Более того, существовало некое принципиальное обстоятельство, которое, как казалось, делало сверхпроводимость невозможной.

В 1937 году П.Л.Капица открыл явление сверхтекучести жидкого гелия – его способность протекать по узким капиллярам без всякого трения. Через четыре года Л.Д.Ландау сумел объяснить это явление. В теории Ландау был выведен так называемый критерий сверхтекучести, согласно которому вязкость могла возникать при движении со скоростью, превышавшей некоторую критическую. Опишу это качественно. Торможение гелия означает изменение его энергии и импульса. Однако жидкий гелий является квантовой жидкостью и может менять энергию и импульс, поглощая и излучая определенные кванты, названные квазичастицами. Эти квазичастицы ведут себя в объеме тела как настоящие частицы, правда с необычной связью между энергией и импульсом. Различие между ними и обычными частицами – электронами, фотонами – заключается в том, что вне тела квазичастицы существовать не могут. В

Опубликовано в «Кванте» №6 за 1988 год.

жидком гелии такие частицы могут появляться лишь тогда, когда скорость течения гелия выше определенной конечной величины.

Казалось бы, отсюда легко перейти к объяснению сверхпроводимости как сверхтекучести заряженной электронной жидкости в металлах. Однако свойства квазичастиц, возникающих в электронной жидкости, оказались отличными от свойств квазичастиц в жидком гелии. Так, для них критическая скорость равна нулю и, следовательно, протекание тока без сопротивления оказывается вообще невозможным. В чем же разница между этими двумя жидкостями – жидким гелием и электронной жидкостью? Она, прежде всего, заключается в том, что собственный момент вращения, называемый спином, у атомов гелия равен нулю, а у электронов он $\hbar/2$, где $\hbar$ – постоянная Планка. Поэтому сразу встал вопрос, не могут ли электроны объединяться в пары. У таких пар полный спин был бы равен либо нулю (спины электронов направлены в противоположные стороны), либо $\hbar$. Подобные пары квазичастиц в электронной жидкости могли бы напоминать квазичастицы жидкого гелия, и можно было бы надеяться объяснить явление сверхпроводимости по аналогии со сверхтекучестью. Однако электроны – одноименно заряженные частицы, благодаря кулоновскому взаимодействию они отталкиваются, и никакой причины для объединения в пары, казалось бы, нет.

Лишь в 1950 году был произведен эксперимент по измерению критических полей $B_{кр}$ и температур $T_{кр}$ образцов ртути разного изотопического состава, который пролил свет на возможные причины образования пар. Выяснилось, что величины $T_{кр}$ и $B_{кр}$ зависят от массы изотопа M по закону

$$T_{кр}, B_{кр} \sim \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Но масса ядер, образующих кристаллическую решетку, проявляется лишь в их движении. Таким образом, стало ясно, что это движение существенно для сверхпроводимости. Основываясь на этом факте, английский физик Г.Фрёлих и независимо от него американский физик Дж.Бардин предложили концепцию, объясняющую природу сил притяжения между электронами. Дело в том, что ядра, а точнее ионы, образующие кристаллическую решетку металла, тоже являются квантовой системой и в этой системе также имеются квазичастицы, соответствующие колебаниям решетки. Они называются фононами. Электроны могут обмениваться фононами, и это обязательно приводит к притяжению, которое может превзойти непосредственное кулоновское отталкивание.

Однако даже после того как была высказана эта идея, оставалось неясно, как благодаря такому притяжению возможно образование пар из электронов. Согласно квантовой механике, для этого силы притяжения должны быть достаточно большими и действовать на большом расстоянии. Иначе кинетическая энергия электронов растащит их в разные стороны. Выход из этого положения нашел американский физик Л.Купер, который обратил внимание на тот факт, что речь идет об образовании пар не из двух изолированных электронов, а в присутствии всей совокупности других электронов. Можно сказать и иначе: пары образуются не из электронов, а из квазичастиц электронной жидкости. Эти пары по имени их открывателя стали называть куперовскими.

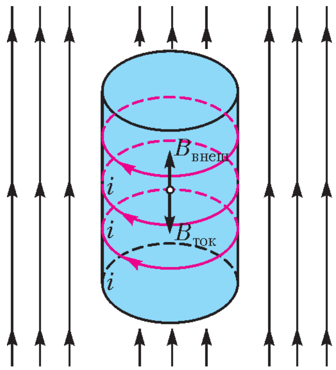
В 1957 году Дж.Бардиным, Л.Купером и Р.Шриффером и независимо от них академиком Н.Н.Боголюбовым была построена микроскопическая теория сверхпроводимости, которая связала воедино все известные опытные факты о свойствах сверхпроводников.

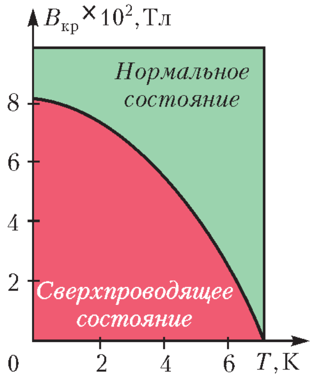
Я не буду излагать здесь эту теорию ввиду ее сложности. Отмечу лишь несколько важных обстоятельств. Прежде всего, если система находится при $T = 0$, то передать ей энергию можно лишь разорвав пару. Это требует затраты конечной энергии, которую обозначают 2Δ. В связи с этим электронная теплоемкость при низких температурах ведет себя как $e^{-\Delta/T}$.

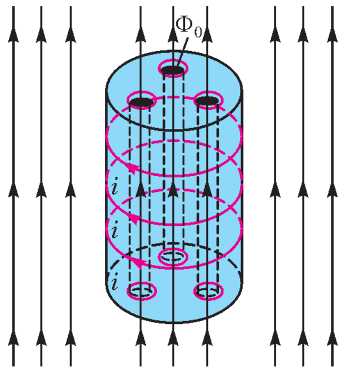
Второе: я уже отмечал, что для связывания электронов в пары существенно наличие всего электронного коллектива. Но состояние этой системы зависит от температуры. Поэтому энергия связи пары 2Δ зависит от температуры и при $T = T_{кр}$ обращается в ноль – сверхпроводник становится нормальным металлом.

Третье свойство связано с тем, что пары имеют конечный размер порядка $10^{-4} - 10^{-5}$ см. Возникает вопрос: как же они не мешают друг другу? Ведь среднее расстояние между электронами в металле порядка 10^{-8} см. Этот парадокс является проявлением квантовых свойств вещества. Один из авторов микроскопической теории сверхпроводимости Шриффер для сравнения уподобил электроны в сверхпроводнике танцорам в современной дискотеке. Двое танцуют, и хотя между ними еще много других танцоров, они не теряют связь друг с другом. Поэтому точнее говорить не о парах, а о парной корреляции электронов в сверхпроводнике.

Я уже говорил о том, что когда внешнее магнитное поле сравнивается с критическим, то сверхпроводник скачком переходит в нормальное состояние. Это утверждение, строго говоря, справедливо лишь для цилиндрического образца в продольном поле и притом не для всех сверхпроводников. Действительно, почему бы







Металлический цилиндр, охлаждаемый до низкой температуры, находится в сверхпроводящем состоянии. При включении магнитного поля на поверхности цилиндра индуцируются круговые токи, которые создают в цилиндре магнитное поле с индукцией $\vec{B}_{ток}$, равной по величине и противоположной по направлению индукции $\vec{B}_{внеш}$ внешнего поля. Эти круговые токи – сверхпроводящие и не затухают со временем. Поэтому в толще сверхпроводника суммарная индукция равна нулю: $\vec{B}_{внеш} + \vec{B}_{ток} = \vec{0}$. Линии индукции магнитного поля не проникают в сверхпроводник.

Чем больше индукция внешнего поля, тем больший ток должен течь по поверхности, чтобы обеспечить экранировку внутренней области металлического сверхпроводника от внешнего поля. При некотором критическом значении индукции внешнего поля $B_{кр}$ поле проникает внутрь образца, сверхпроводимость разрушается – металл переходит в нормальное состояние. Для такого перехода не обязательно внешнее магнитное поле. Ток, текущий по поверхности сверхпроводника, сам создает магнитное поле, и когда $B_{ток}$ достигает значения, соответствующего $B_{кр}$, сверхпроводимость разрушается. Величина $B_{кр}$ растет с уменьшением температуры, но даже вблизи $T = 0$ значение $B_{кр}$ у чистых сверхпроводящих металлов невелико – не более десятых долей тесла.

В сверхпроводящих сплавах, так же как и в ряде сверхпроводящих соединений, при некотором значении индукции $B_{кр1}$ поле начинает проникать внутрь сверхпроводника. В толще образца появляются отдельные сгустки линий магнитной индукции. Каждый такой сгусток окружен кольцевыми незатухающими токами, напоминающими вихри в жидкости или в газе. Эти сгустки и называют вихрями. Внутри вихря сверхпроводимость разрушена, но в пространстве между вихрями она сохраняется. С увеличением индукции магнитного поля число вихрей растет. При некотором значении индукции $B_{кр2}$ вихри начинают перекрываться, поле «заполняет» образец, сверхпроводимость полностью разрушается. Сверхпроводники с такими свойствами называют сверхпроводниками второго рода массивному сверхпроводнику не разбиться на тонкие слои нормального и сверхпроводящего металла и не сохранить сверхпроводимость до гораздо больших полей? Ведь критическое поле для тонкого слоя выше, чем для массивного сверхпроводника. Разбиение на слои не происходит потому, что во всех чистых сверхпроводниках, состоящих из одного металла, существует особая поверхностная энергия, возникающая на границах между нормальной и сверхпроводящей фазами. Эта энергия, подобно поверхностному натяжению, стремится уменьшить поверхность границ. Микроскопическая теория объяснила ее происхождение. Оказалось, что она связана с конечным размером куперовских пар. Если уменьшать этот размер, то поверхностная энергия может изменить знак и сделаться отрицательной. Тем самым возникает естественное разделение сверхпроводников на сверхпроводники первого рода – с положительной поверхностной энергией и сверхпроводники второго рода – с отрицательной поверхностной энергией. Надо заметить, что сверхпроводники второго рода являются гораздо более распространенными, чем сверхпроводники первого рода. Мало того: любой сверхпроводник первого рода можно перевести во второй род. Для этого достаточно ввести в него некоторое количество атомов примеси или как-нибудь иначе испортить кристаллическую решетку. Электроны начинают рассеиваться на этих дефектах. Характер движения электронов меняется, и размер пар становится меньше. При достаточной концентрации дефектов сверхпроводник первого рода обязательно переходит во второй род.

Теперь я немного расскажу о свойствах сверхпроводников второго рода. Поскольку поверхностная энергия в них отрицательна, то ничто не препятствует бесконечному расщеплению их объема на нормальные и сверхпроводящие области. Поэтому сверхпроводимость в них с увеличением внешнего магнитного поля вытесняется постепенно, начиная с некоторого значения поля $B_{\text{кр}1}$. Переход в нормальное состояние осуществляется в верхнем критическом поле $B_{\text{кр}2}$. Физический смысл $B_{\text{кр}2}$ заключается в следующем. В магнитном поле электроны, будучи заряженными частицами, движутся по спиральным траекториям и радиус спирали обратно пропорционален B. Если радиус спирали становится меньше размера пары, то пара уже не может существовать и разваливается. Если же внешнее магнитное поле ниже $B_{\text{кр}2}$, но выше $B_{\text{кр}1}$, то оно частично проникает в сверхпроводник. Происходит это за счет возникновения в сверхпроводнике вихревых токов. Оказывается, что эти вихри являются квантовыми объектами. Каждый из них несет квант магнитного потока. Если хотите, можно сказать, что число силовых линий, проходящих в каждом таком вихре, строго определенное. Квант потока является очень малой величиной и равен

$$\Phi_0 = \frac{\pi\hbar}{e} = 2\cdot 10^{-15}\ \text{Вб}.$$

При уменьшении внешнего поля вихри расходятся и в поле $B_{\text{кр}1}$ исчезают из сверхпроводника совсем. Фактически поле $B_{\text{кр}1}$ – это то поле, при котором один вихрь еще может существовать в сверхпроводнике. Область между полями $B_{\text{кр}1}$ и $B_{\text{кр}2}$ называется смешанным состоянием. В этом состоянии сверхпроводник пронизан вихревыми нитями – миниатюрными соленоидами, расположенными в правильном порядке. В поперечном срезе они образуют треугольную решетку. Каждый вихрь имеет сердцевину, размер которой равен размеру куперовской пары; эту сердцевину можно считать областью нормального металла.

(Продолжение следует)

Магия комплексных чисел

А.КАНУННИКОВ

Во второй части нашего представления мы покажем, какие чудеса творят комплексные числа в тригонометрии.

§4. Многочлены Чебышёва и формула Муавра

В параграфах 2 и 3 мы совершали алгебраические и тригонометрические преобразования и сейчас хотели бы обратить ваше внимание на некую параллель между ними. Видите ли вы сходство между использованными выше формулами $\cos 2\varphi = 2\cos^2\varphi - 1$, $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ и равенствами

$$\begin{aligned} a^2 + a^{-2} &= \left(a + a^{-1}\right)^2 - 2, \\ a^3 + a^{-3} &= \left(a + a^{-1}\right)^3 - 3\left(a + a^{-1}\right), \end{aligned} \tag{13}$$

примененными в выкладках (3) и (5)?

По индукции несложно доказать, что $a^n + a^{-n}$ полиномиально выражается через $a + a^{-1}$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Оказывается, эта полиномиальная зависимость имеет «тригонометрические корни» – почти так же, с точностью до двойки, $\cos n\varphi$ выражается через $\cos\varphi$. Более точно,

$$\boxed{\begin{aligned} \cos n\varphi &= T_n(\cos\varphi), \\ \frac{a^n + a^{-n}}{2} &= T_n\left(\frac{a + a^{-1}}{2}\right), \end{aligned}} \tag{14}$$

где $T_n(x)$ – это знаменитые многочлены Чебышёва: $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 2x^2 - 1$, $T_3(x) = 4x^2 - 3x$, …

«При чем здесь комплексные числа? – может спросить читатель. – Полиномиальную зависимость в обоих случаях можно установить по отдельности – составить рекуррентные соотношения и увидеть, что они одинаковые». Да, это правда, но только комплексные числа дают простое и концептуальное объяснение этому совпадению, выявляя скрытые связи. Вся идея в том, что

$$\cos n\varphi = \frac{a^n + a^{-n}}{2} \tag{15}$$

для подходящей (комплекснозначной!) функции $a = a(\varphi)$, а именно для функции $a(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$. Легко видеть, что она удовлетворяет (15) при $n = 1$, так как $a(\varphi)^{-1} = \cos\varphi - i\sin\varphi$:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \\ = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1.$$

Задача 7. «Функция $a(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi$ словно свалилась с неба, – может воскликнуть читатель. – Как догадаться взять именно эту функцию?» К ней можно прийти, решив уравнение (15) относительно a при $n = 1$. Проделайте это. На самом деле, $\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$ – **комплексная экспонента**. Но это отдельная история.

Теперь возведем $a(\varphi)$ в квадрат:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 = \\ = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + i(2\cos\varphi\sin\varphi) = \\ = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi.$$

Аналогично, $(\cos\varphi - i\sin\varphi)^2 = \cos 2\varphi - i\sin 2\varphi$, откуда следует (15) при $n = 2$. Вот так обе формулы двойного угла (для косинуса и синуса), взявшись за руки, оказались в одном комплексном тождестве.

Задача 8. Теперь никто не удержит читателя от того, чтобы возвести $a(\varphi)$ в куб, ожидая получить обе формулы тройного угла.

Теорема 1 (формула Муавра, 1707). *Для всех $n \in \mathbb{Z}$ и $\varphi \in \mathbb{R}$ имеем (рис. 4):*

$$\boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.} \tag{16}$$

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

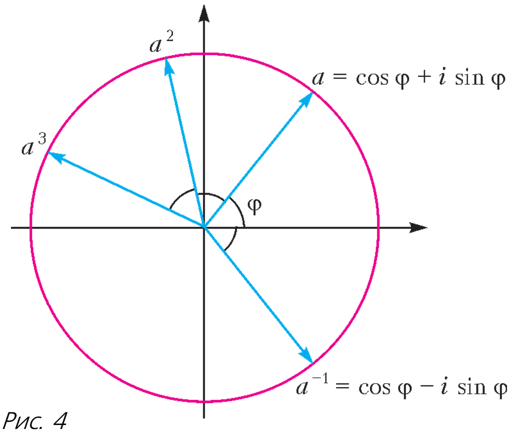


Рис. 4

Читатель без труда сможет доказать формулу Муавра по индукции, опираясь на формулы тригонометрии (задача 8 – это шаг индукции от 2 к 3). Однако это – формальное решение. Концептуальный же путь состоит в том, чтобы прояснить *геометрический смысл умножения комплексных чисел* и одновременно доказать формулы тригонометрии – об этом на странице 26.

Задача 9. Чтобы получить (14), осталось доказать, что $\cos n\varphi$ – многочлен от $\cos\varphi$. Сделайте это с помощью формулы Муавра.

§5. Комплексные числа и тригонометрия

Капитальные труды по тригонометрии в современном виде были написаны Гауссом, Коши, Лежандром и др. в начале XIX века, главным образом в связи с исследованиями в астрономии и сферической геометрии. Комплексные числа к тому времени были уже хорошо изучены, и об их тесной связи с тригонометрией было известно. Долгое время, до начала XVIII века, ученые не знали, можно ли извлекать корни любых степеней из комплексных чисел. И только с открытием Муавром формулы (16), т.е. с помощью тригонометрии, эту задачу удалось решить (см. с. 26). Как бы в знак благодарности комплексные числа сильно обогатили тригонометрию, дали ключи к решению многих задач и заставили по-новому взглянуть на уже известные формулы и факты.

Задача 10. Как сосчитать (свернуть) суммы $\sum_{k=1}^{n}\cos k\varphi$ и $\sum_{k=1}^{n}\sin k\varphi$?

В принципе можно выкрутиться – умножить и разделить обе суммы на $\sin(\varphi/2)$ и воспользоваться формулами $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$ и $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$. В обоих случаях после сокращений останутся только крайние члены. Похожий эффект возникает при суммировании геометрической прогрессии $a + \ldots + a^n$, умножение которой на сворачивающий множитель $1 - a$ приводит к уничтожению внутренних слагаемых:

$$\left(a + \ldots + a^n\right)(1-a) = a - a^{n+1}.$$

Оказывается, это не просто случайное сходство: *одновременное* вычисление двух заданных сумм с использованием комплексных чисел и впрямь приводит к геометрической прогрессии. Главное – рассмотреть косинус и синус как части (действительную и мнимую) одного комплексного числа – нашего старого знакомого $a = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Вернемся к удивительным разложениям (7)–(9) и раскроем читателю секрет фокуса. Для примера докажем (8). Домножив левую часть на $x - 1$, получим двучлен $x^{2n+1} - 1$. (Кстати, так доказывается, что $x^{2n} + \ldots + x + 1 > 0$ при всех $x \in \mathbb{R}$, ведь $x^{2n+1} - 1$ и $x - 1$ одного знака.) Согласно формуле Муавра (16) с $2n + 1$ вместо n, этот двучлен имеет $2n + 1$ корней:

$$x_k = \cos\frac{2\pi k}{2n+1} + i\sin\frac{2\pi k}{2n+1},\quad k = 0, \ldots, 2n. \tag{17}$$

При этом $x_0 = 1$, а остальные $2n$ корней разбиваются на пары комплексно-сопряженных: $x_k = \overline{x_{2n+1-k}}$ (других корней нет, так как степень двучлена $2n + 1$). Теперь разложим наш двучлен над $\mathbb{C}$ и «заметем следы» – сгруппируем скобки с сопряженными корнями:

$$x^{2n+1} - 1 = \prod_{k=0}^{2n}\left(x - x_k\right) =$$

$$= (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x - x_k\right)\left(x - \overline{x_k}\right) =$$

$$= (x-1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2 - 2\cos\frac{2\pi k}{2n+1}x + 1\right).$$

Сокращая на $x-1$, получаем (8). Здорово, правда?

Такие ситуации встречаются часто. Задача формулируется в терминах действительных чисел, но решить ее только «действительными средствами» крайне трудно, а то и вовсе невозможно. Но стоит взмыть со «взлетной полосы» – действительной оси – «ввысь» в комплексную плоскость, и невидимые ранее ключи к разгадке вдруг откроются, а задача буквально рассыплется. Останется только «совершить мягкую посадку», истолковав полученные знания в исходных, действительных терминах.

Задача 11. Из удивительного разложения (8) можно вывести не менее удивительные следствия. Вычислите произведения:

$$\text{а) } \prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\pi k}{2n+1};\ \text{б) } \prod_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{2n+1}.$$

Разберем пункт а) при $n=4$. Выкинув табличные значения от угла $\frac{3\pi}{9}$, получим произведения $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$ и $\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}\sin\frac{4\pi}{9}$. Первое еще можно сосчитать, если догадаться до трюка – умножить на $\sin\frac{\pi}{9}$, имея в виду формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Тогда произведение последовательно свернется в $\frac{1}{8}\sin\frac{8\pi}{9}$, а так как $\sin\frac{8\pi}{9}=\sin\frac{\pi}{9}$, то $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}=$ $=\frac{1}{8}$. Но вот с произведением синусов подобные ухищрения, видимо, не сработают.

Задача 12. Числа $\theta_n=\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$ называются *числами Грегори* [1]. Вот несколько любопытных равенств, которым они удовлетворяют:

$$\theta_2+\theta_3=\theta_2+\theta_5+\theta_8=\theta_3+\theta_5+\theta_7+\theta_8=$$
$$=4\theta_5-\theta_{239}=\theta_1=\frac{\pi}{4}. \quad (18)$$

[1] Джеймс Грегори (1638–1675) – шотландский математик и астроном. Его работы по разложениям функций в ряды и их применениям вдохновили молодого И.Ньютона. В 1671 году Грегори получил разложение арктангенса (хотя двумя веками ранее это сделали в Индии), оттого числа $\operatorname{arctg}\frac{1}{n}$ названы в его честь.

Для доказательства можно, конечно, многократно применять формулу тангенса суммы

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}, \quad (19)$$

учитывая периодичность и область определения тангенса. Но проще и техничнее применить комплексные числа, интерпретируя θ_n как аргумент комплексного числа $n+i$.

Для примера вычислим несколькими способами сумму $s=\operatorname{arctg}1+\operatorname{arctg}1/2+\operatorname{arctg}1/3$.

I способ. Ясно, что $\operatorname{arctg}1=\pi/4$. Воспользуемся формулой (19) для $\alpha=\operatorname{arctg}1/2$ и $\beta=\operatorname{arctg}1/3$: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{1/2+1/3}{1-(1/2)(1/3)}=1$. Чтобы отсюда заключить, что $\alpha+\beta$ равно $\pi/4$ (а, скажем, не $5\pi/4$), остается оценить $0<\alpha,\beta<\pi/2$. Окончательно $s=\pi/2$.

II способ. То, что три арктангенса дают в сумме прямой угол, можно увидеть на рисунке 5, отчего непременно поднимется настроение!

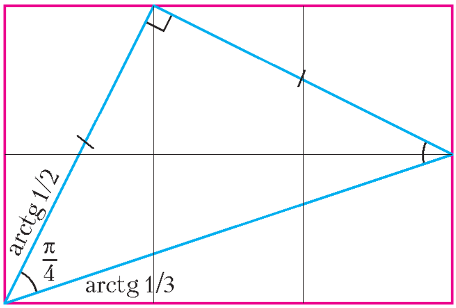


Рис. 5

III способ. **При умножении комплексных чисел их аргументы складываются** (см. с.25). Поэтому искомая сумма – это аргумент произведения $(1+i)(2+i)(3+i)$. Перемножив, получим число $10i$ – его аргумент $\pi/2$. Правда, аргумент определен с точностью до кратного 2π, поэтому, как и в первом решении, надо сделать оценку.

Предлагаем читателю доказать равенства (18), оценив преимущества III способа.

§6. Суммы биномиальных коэффициентов

Подставив в формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k \quad (20)$$

значение $x=1$, получим формулу для суммы биномиальных коэффициентов:

$$C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n=2^n,$$

имеющую ясный комбинаторный смысл (слева и справа двумя способами посчитано число подмножеств n-элементного множества). Подставив в ту же формулу $x = -1$, получим

$$C_n^0 - C_n^1 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0. \quad (21)$$

Сложив эти два равенства, найдем суммы биномиальных коэффициентов через один:

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots = 2^{n-1}. \quad (22)$$

Таким образом, подмножеств из четного и нечетного числа элементов в n-элементном множестве поровну.

А как сосчитать суммы чисел C_n^k, скажем, по всем k, кратным 3 или 4 (или другому числу)? По обыкновению, сразу достанем из шляпы кролика, в смысле готовый ответ:

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}2^n + \frac{2}{3}\cos\frac{\pi n}{3}, \quad (23)$$

$$C_n^0 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{4}2^n + \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2}\cos\frac{\pi n}{4}. \quad (24)$$

Глядя только на правые части этих равенств, даже не сразу поймешь, что они целочисленны! Правда, после всего сказанного и показанного мы уже не ожидаем такого оглушительного эффекта. Вероятно, наш зритель привык, что когда на сцене невесть откуда появляются косинусы, где-то за кулисами прячутся комплексные числа… Так оно и есть. Оказывается, для вывода выписанных формул (и их обобщений) нужно действовать *аналогично* предыдущему – подставлять в (20) вместо x корни соответствующей степени из единицы. Так, для вывода (24) подставим $x = i$:

$$(1+i)^n = C_n^0 + C_n^1 i - C_n^2 - C_n^3 i + C_n^4 + \ldots =$$
$$= \left(C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots\right) + \left(C_n^1 - C_n^3 + \ldots\right)i.$$

Нас интересует действительная часть этого выражения – сложив его с первой суммой в (22) и разделив пополам, получим ответ.

Задача 13. Завершите выкладки, вычислив $(1+i)^n$ двумя способами: а) алгебраическим – используя равенство $(1+i)^2 = 2i$; б) тригонометрическим – перейдя к *тригонометрической форме*: $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ и используя формулу Муавра (вот откуда корень из двух и косинус).

Задача 14. Попробуйте доказать равенство (23), подставив в (20) значение

$$x = \varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Вас ждет приятный сюрприз: $1 + \varepsilon = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$ (рис.6). Это большая удача!

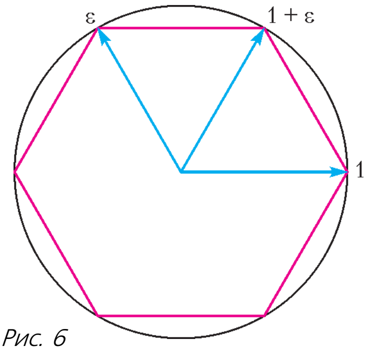


Рис. 6

Обсудим теперь такую аналитическую задачу. Выше мы показали, что суммы чисел C_n^k с четными и нечетными k – это половины от суммы $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$. Верны ли аналогичные утверждения, если идти по числам C_n^k с шагом 3, 4 и т.д.? Например, составляет ли сумма $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$ треть от 2^n? Ровно треть, разумеется, нет, ведь 2^n не кратно 3. Однако из формулы (23) ясно, что всегда получается ближайшее целое сверху или снизу к $2^n/3$, а причудливый довесок $\frac{2}{3}\cos\frac{\pi n}{3} \in \left\{\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}\right\}$ играет роль «переключателя» – наподобие пресловутой $(-1)^n$, только с большим числом состояний.

С формулой (24) дело обстоит *по большому счету* так же. Здесь, правда, слагаемое $2^{\frac{n}{2}-1}\cos\frac{\pi n}{4}$ уже растет по модулю с ростом n, но все равно «тягаться» с *глав-*

ным членом 2^{n-2} ему не по силам:

$$\left|\frac{2^{\frac{n}{2}-1}\cos\frac{\pi n}{4}}{2^{n-2}}\right| = 2^{1-\frac{n}{2}} \to 0,\ n\to\infty.$$

Итак, одним из следствий формул (23) и (24) является их *асимптотика* (поведение на бесконечности):

$$\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ кратно } 3}} C_n^k \sim \frac{1}{3}2^n, \qquad \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ кратно } 4}} C_n^k \sim \frac{1}{4}2^n.$$

(Запись $a_n \sim b_n$ означает, что $a_n/b_n \to 1$ при $n\to\infty$. Говорят, что последовательности (a_n) и (b_n) эквивалентны.) Заинтересовавшемуся читателю предлагаем обобщить эти результаты, решив следующую задачу.

Задача 15. Докажите, что

$$\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\equiv r \bmod m}} C_n^k \sim \frac{1}{m}2^n$$

для любых $m, r \in \mathbb{N}$. Иными словами, доля от 2^n любой суммы чисел C_n^k с шагом m стремится к $1/m$ при $n\to\infty$. Для этого попробуйте вывести формулу для левой части.

Как водится, самое простое мы сделали сами, разобрав для затравки случаи $m = 3, 4$ (при $r = 0$, впрочем, это как раз неважно). При $m \ge 5$ понадобятся новые идеи.

§7. Построение правильного 17-угольника

С помощью комплексных чисел удалось решить древнюю проблему: какие правильные многоугольники можно построить с помощью циркуля и линейки? Античные геометры умели только самое простое – строить треугольник, квадрат и пятиугольник, а также удваивать число сторон. До конца XVIII века никаких продвижений не было. И вот в 1796 году 18-летний Гаусс открывает миру способ построения правильного 17-угольника! А вскоре дает описание всех n, для которых можно построить правильный n-угольник. Подробнее об этом открытии, его истории и научном значении вы можете прочитать в [2] (список литературы см. в предыдущем номере).

Объяснить все идеи Гаусса – мы не объясним, это тема для отдельной статьи, но научить строить 17-угольник – научим.

Достаточно построить число $\cos\frac{2\pi}{17}$. Это делается с помощью следующих формул, в которых мы обозначили $c_k = 2\cos\frac{2\pi k}{17}$, $k = 1, \ldots, 8$:

$$x_1 = c_1 + c_2 + c_4 + c_8 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2},$$
$$x_2 = c_3 + c_5 + c_6 + c_7 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \qquad (25)$$

$$y_1 = c_1 + c_4 = \frac{x_1 + \sqrt{x_1^2+4}}{2},$$
$$y_2 = c_3 + c_5 = \frac{x_2 + \sqrt{x_2^2+4}}{2}, \qquad (26)$$

$$\boxed{c_1 = \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4y_2}}{2}.} \qquad (27)$$

Задача 16. Попробуем вместе с читателем доказать эти формулы. Сам их вид явствует, что возникли они при решении квадратных уравнений. Будем двигаться снизу вверх.

а) Чтобы доказать (27), покажите, что $c_1c_4 = c_3 + c_5$, и учтите, что $c_1 > c_4$.

б) Формула для y_1 следует из равенства $(c_1+c_4)(c_2+c_8) = -1$. Докажите его и аналогично выведите формулу для y_2.

в) Самое трудоемкое – доказать равенства (25). Понятно, что они сводятся к равенству $x_1x_2 = -4$. Рискнете броситься в тригонометрические дебри?

Почему косинусы надо группировать именно так? Как до всего этого догадаться? В чем секрет Гаусса? Хотя все числа в формулах действительные, но ответы на эти вопросы лежат в комплексной плоскости. Кстати, там же лежит и искомый 17-угольник! Ведь его вершины – это корни 17-й степени из единицы (см. формулу (18) на с. 27). Как тут не отметить, что восстановление вершины $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$ – это не что иное как геометрическое решение еще одного квадратного уравнения:

$$x^2 - 2\cos\frac{2\pi}{17}x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \varepsilon, \bar{\varepsilon}.$$

Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

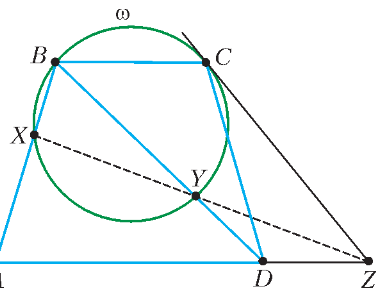
Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: math@kvant.ras.ru и phys@kvant.ras.ru соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задачи М2366 – М2369 предлагались на заключительном этапе XLIII Всероссийской олимпиады школьников по математике.

Задачи М2466–М2469, Ф2473–Ф2476

М2466. Дана равнобокая трапеция $ABCD$ с основаниями BC и AD (см.рисунок). Окружность ω проходит через вершины B



и C и вторично пересекает сторону AB и диагональ BD в точках X и Y соответственно. Касательная, проведенная к окружности ω в точке C, пересекает луч AD в точке Z. Докажите, что точки X, Y и Z лежат на одной прямой.

А.Кузнецов

М2467. а) Пусть $P(x)$ – многочлен степени $n \geq 2$ с неотрицательными коэффициентами, а a, b и c – длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что числа $\sqrt[n]{P(a)}$, $\sqrt[n]{P(b)}$ и $\sqrt[n]{P(c)}$ также являются длинами сторон некоторого треугольника.
б) Та же задача, где «треугольник» заменен на «остроугольный треугольник».

Н.Агаханов

М2468. Каждая клетка доски 100×100 окрашена либо в черный, либо в белый цвет, причем все клетки, примыкающие к границе доски, – черные. Оказалось, что нигде на доске нет одноцветного клетчатого квадрата 2×2. Докажите, что на доске найдется клетчатый квадрат 2×2, клетки которого окрашены в шахматном порядке.

М.Антипов

М2469*. На доске выписаны в ряд n положительных чисел $a_1, a_2, \ldots a_n$. Вася хочет выписать под каждым числом a_i число $b_i \geq a_i$ так, чтобы для любых двух из чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ отношение одного из них к другому было целым. Докажите, что Вася может выписать требуемые числа так, чтобы выполнялось неравенство

$$b_1 b_2 \ldots b_n \leq 2^{\frac{n-1}{2}} a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Ф.Петров

Ф2473. На горизонтальной поверхности стола лежит вытянутая в длину цепочка с равномерным распределением массы по длине. Цепочка расположена перпендикулярно краю стола. Столешница имеет закругленный край с радиусом кривизны, который значительно меньше длины цепочки, но значительно больше размеров звеньев цепочки. К ближайшему к краю стола концу цепочки прикреплена невесомая нить, за которую цепочку очень медленно начинают «стаскивать» со стола, причем конец нити движется вертикально под краем стола. В тот момент когда на горизонтальной поверхности осталось только 60% длины, цепочка неудержимо заскользила и упала со стола. Каков коэффициент трения цепочки о поверхность стола?

Ц.Почкин

Ф2474. Тонкий легкий круглый диск радиусом $R = 10$ см с крючком посередине положили на поверхность чистой жидкости, которая хорошо смачивает нижнюю поверхность диска. Диск начинают медленно приподнимать, прикладывая к крючку постепенно растущую по величине вертикальную силу. Какой максимальной величины F достигнет сила, прежде чем диск оторвется от поверхности жидкости? Коэффициент поверхностного натяжения жидкости $\sigma = 0{,}1$ Дж/м^2. Плотность жидкости $\rho = 10^3$ кг/м^3.

А.Старов

Ф2475. В огромном газовом облаке в межзвездном пространстве находится газообразный гелий при температуре $T_0 = 10$ К. Концентрация молекул газа $n = 10^9$ м$^{-3}$, радиус молекул $R = 0{,}1$ нм. В какой-то момент в каждом кубическом сантиметре облака одна молекула внезапно получает такой импульс, что ее скорость оказывается равной по величине $v = 10^5$ м/с. Импульсы, полученные молекулами, направлены хаотически. Оцените время установления теплового равновесия. Какой будет установившаяся температура? Как изменится ответ на вопрос про температуру, если все полученные молекулами импульсы будут направлены в одну и ту же сторону?

Фольклор

Ф2476. Недалеко от берега моря на дне лежит большой камень, имеющий форму шара радиусом R. Его верхняя точка находится как раз на уровне воды. Вася встал на самый верх этого камня и, не шевелясь, с высоты своего роста $h = 1{,}7$ м рассматривает поверхность камня, находящуюся под прозрачной водой. Маленький краб ползет по поверхности этого камня сверху вниз. В тот момент когда краб оказался на глубине, равной половине радиуса шара, Вася перестал его видеть. Каков радиус шара R? Коэффициент преломления воды $n = 4/3$.

Р.Шаров

Решения задач М2454–М2457, Ф2461–Ф2464

М2454. *Изначально на доске записаны несколько (больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску дописывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел (так, если бы на доске изначально были записаны числа 1, 2, 2, то на первой минуте было бы дописано число $1^2 + 2^2 + 2^2$). Докажите, что сотое дописанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.*

Пусть $S_1, \ldots, S_{100}$ – числа, которые были записаны на доске в первые 100 минут. Пусть перед дописыванием числа S_i на доске были числа $a_1, \ldots, a_k$. Тогда $S_i = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2$, а следующее дописанное число есть $S_{i+1} = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_k^2 + S_i^2 = S_i + S_i^2$.

Итак, $S_{i+1} = S_i(S_i + 1)$. Значит, S_{i+1} содержит в своем разложении на простые множители все простые числа, на которые делится S_i; кроме того, поскольку S_i и S_{i+1} взаимно просты, S_{i+1} содержит хотя бы один новый простой множитель (делитель числа $1 + S_i$). Так как $S_1 > 1$, то S_1 содержит в своем разложении хотя бы один простой множитель. Отсюда последовательно получаем, что для $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, 100$ число S_i содержит в своем разложении хотя бы i различных простых множителей. При $i = 100$ это дает решение задачи.

И.Богданов, П.Кожевников

М2455. *Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ касается ω (рис.1). Окружность Ω_b с центром P проходит*

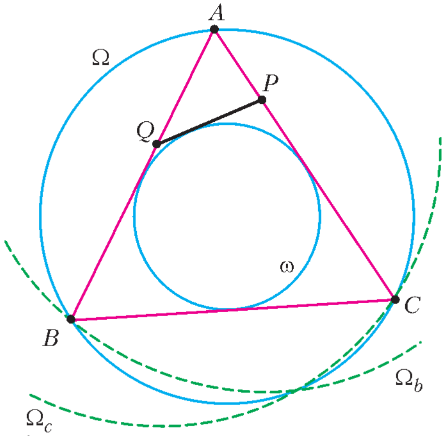


Рис. 1

через B, а окружность Ω_c с центром Q проходит через C. Докажите, что окружности Ω, Ω_b и Ω_c имеют общую точку.

Пусть O – центр треугольника ABC. Прямая PO – линия центров окружностей Ω и Ω_b, поэтому Ω и Ω_b вторично пересекаются в точке X, симметричной точке B относительно прямой PO (рис.2,*а*). Теперь достаточно понять, что X переходит в C при симметрии относительно прямой QO; тогда получим, что X лежит и на окружности Ω_c.

При последовательном выполнении (композиции) симметрий относительно прямых PO и QO точка B сначала перейдет в точку X, а затем в некоторую точку C'. Заметим, что $\angle POQ = 60°$ (из треугольника OPQ вычисляем

$$\angle POQ = 180° - \angle OPQ - \angle OQP =$$
$$= 180° - \frac{\angle QPC + \angle PQB}{2} =$$
$$= \frac{\angle APQ + \angle AQP}{2} = \frac{180° - \angle PAQ}{2}),$$

поэтому последовательное выполнение симметрий относительно прямых PO и QO дает поворот на $2 \cdot 60° = 120°$ вокруг точки O, т.е. поворот, переводящий точку B в точку C. Значит, $C' = C$, что нам и требовалось.

Приведем еще один способ решения с красивым описанием общей точки окружностей Ω, Ω_b и Ω_c. Рассмотрим правильный треугольник XYZ, описанный вокруг ω и вписанный в Ω, такой, что точки P и Q лежат на его стороне YZ (рис.2,*б*). Тогда точка X – требуемая точка; это следует из того, что треугольники ABC и XYZ симметричны друг другу относительно каждой из прямых PO и QO.

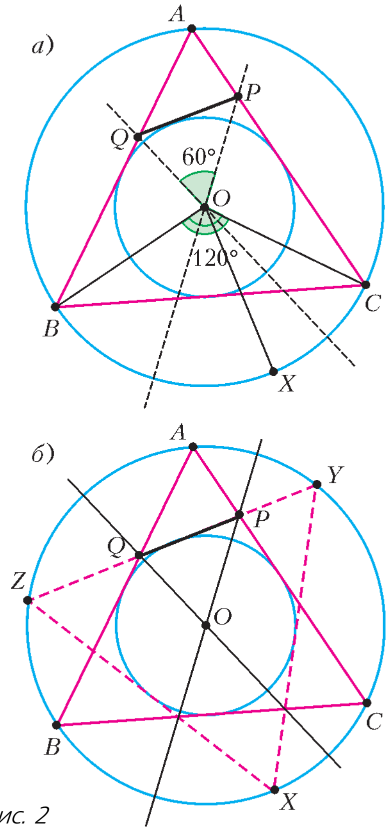


Рис. 2

И.Богданов, П.Кожевников

M2456. *Выпуклый многоугольник разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. Докажите, что в этом многоугольнике найдутся две равные стороны.*

Докажем утверждение задачи индукцией по количеству n сторон многоугольника. База индукции $n = 3$ очевидна. Теперь выведем утверждение для k-угольника ($k \geq 4$), предполагая, что оно верно для многоугольников с количеством сторон меньше k.

Итак, пусть выпуклый k-угольник P разрезан непересекающимися диагоналями на

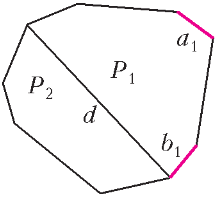


Рис. 1

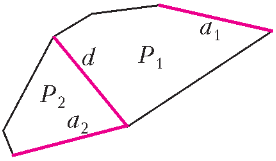


Рис. 2

равнобедренные треугольники. Рассмотрим одну из этих диагоналей, назовем ее d. Диагональ d делит P на два многоугольника P_1 и P_2. У каждого из многоугольников P_1 и P_2 количество сторон меньше k, и каждый из них разрезан непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники. По нашему предположению, в многоугольнике P_1 имеются равные стороны a_1 и b_1. Если ни a_1, ни b_1 не совпадает с d (рис. 1), то a_1 и b_1 – стороны P, и наше утверждение доказано.

Иначе пусть, например, b_1 совпадает с d (рис. 2). Аналогично, в многоугольнике P_2 найдутся равные стороны a_2 и b_2, и если ни a_2, ни b_2 не совпадает с d, то утверждение доказано. Наконец, пусть, например, b_2 совпадает с d (см. рис. 2). Но тогда a_1 и a_2 – различные стороны многоугольника P, каждая из которых равна d, т.е. a_1 и a_2 – требуемая пара сторон.

А.Грибалко

М2457. *Существует ли треугольник со сторонами x, y и z такой, что $x^3+y^3+z^3=(x+y)(y+z)(z+x)$?*

Ответ: нет, не существует.

Предположим, что такой треугольник существует. Тогда, используя неравенства треугольника $y+z>x$, $z+x>y$, $x+y>z$, имеем

$$(x+y)(x+z)(y+z)=$$
$$=x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)+2xyz>$$
$$> x^2\cdot x+y^2\cdot y+z^2\cdot z+0.$$

Противоречие.

Приведенную выкладку можно видоизменить, предварительно упорядочив переменные. Можно считать, что $x\ge y\ge z$. Тогда по неравенству треугольника $y+z>x$, откуда

$$(x+y)(x+z)(y+z)>(x+y)(x+z)x=$$
$$=x^3+x^2y+x^2z+xyz>$$
$$> x^3+x^2y+x^2z\ge x^3+y^3+z^3.$$

Противоречие.

Еще одно решение можно получить, перейдя к переменным a, b и c, где a, b и c – длины отрезков касательных от вершин треугольника до точек касания со вписанной окружностью, так что $x=b+c$, $y=a+c$ и $z=a+b$. Тогда

$$(x+y)(y+z)(z+x)=$$
$$=(a+2b+c)(a+b+2c)(2a+b+c)=$$
$$=2\left(a^3+b^3+c^3\right)+$$
$$+7\left(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\right)+$$
$$+16abc$$

и

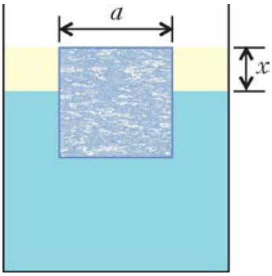
$$x^3+y^3+z^3=(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3=$$
$$=2\left(a^3+b^3+c^3\right)+$$
$$+3\left(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2\right).$$

Теперь нетрудно видеть, что разность $(x+y)(y+z)(z+x)-x^3-y^3-z^3$ положительна. Противоречие.

Заметим, что существуют три положительных числа x, y, z таких, что равенство из условия выполнено. Например, 1, 1, $1+\sqrt{5}$. Таким образом, условие, что x, y, z являются длинами сторон треугольника, существенно.

И.Богданов

Ф2461. *В цилиндрический стакан с площадью основания $S=400$ см^2 налита вода, в которую погружен кубик льда со стороной $a=2$ см (см. рисунок). В стакан наливают такое количество керосина, что верхняя грань кубика совпадает с поверхностью керосина. Кубик вынимают из стакана, а вместо него помещают другой ледяной кубик со стороной $b=6$ см. Какой объем керосина необходимо долить в стакан, чтобы кубик вновь был доверху покрыт керосином? Считайте,*



что оба кубика не касаются дна, а жидкость из стакана не выливается. Плотности льда, воды и керосина равны $\rho = 0{,}9$ г/см^3, $\rho_0 = 1{,}0$ г/см^3 и $\rho_1 = 0{,}8$ г/см^3 соответственно.

По закону Архимеда выталкивающая сила, действующая на первый кубик, равна весу двух вытесненных жидкостей – воды и керосина:

$$F_{\text{выт}} = \rho_0 g a^2 (a - x) + \rho_1 g a^2 x .$$

Эта сила уравновешивается силой тяжести ледяного кубика

$$F_{\text{т}} = \rho g a^3 .$$

Отсюда получаем

$$\rho a = \rho_0 a - \rho_0 x + \rho_1 x ,$$

и

$$x = a\frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 - \rho_1} .$$

Теперь вычислим объем керосина V_1, который налили в стакан в первом случае. Керосин занимает объем цилиндра высотой x и площадью основания S, из которого вырезан цилиндр такой же высоты, но с меньшей площадью основания, равной a^2. Поэтому

$$V_1 = x\left(S - a^2\right) = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 - \rho_1} a\left(S - a^2\right).$$

Если во втором случае ребро кубика равно b, то соответствующий объем керосина V_2 находим заменой a и на b:

$$V_2 = \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 - \rho_1} b\left(S - b^2\right).$$

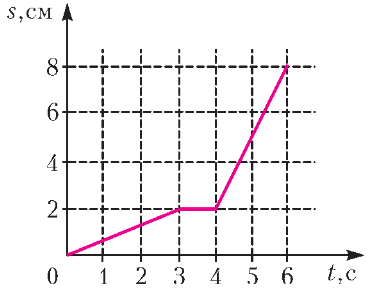
Искомый объем керосина равняется разности указанных объемов:

$$V = V_2 - V_1 =$$

$$= \frac{\rho_0 - \rho}{\rho_0 - \rho_1}\left(b\left(S - b^2\right) - a\left(S - a^2\right)\right) = 696 \text{ см}^3.$$

А.Мусин

Ф2462. *На рисунке изображен график зависимости пройденного муравьем пути от времени за первые 6 с его движения по прямой в одном направлении. Известно, что на последнем участке пути, не показанном на графике, т.е. в промежутке между шестой и восьмой секундами, муравей двигался равномерно, а его средняя скорость за все 8 с движения составила 1,5 см/с. Найдите скорости муравья в промежутках времени 0–3 с, 3–4 с, 5–6 с и 6–8 с.*



Скорость муравья на всех интересующих нас участках, кроме последнего, определяется из данного графика по наклону отрезков ломаной:

$$v_1 = \frac{2\text{ см}}{3\text{ с}} \approx 0{,}66 \text{ см/с}, \quad v_2 = 0,$$

$$v_3 = \frac{6\text{ см}}{2\text{ с}} = 3 \text{ см/с}.$$

Умножая среднюю скорость на все время движения (8 с), получим, что полный путь, пройденный муравьем, равен

$$s = 1{,}5\text{ см/с} \cdot 8\text{ с} = 12 \text{ см}.$$

Таким образом, на четвертом (последнем) участке пройденный путь равен

$$s_4 = 12 \text{ см} - 8 \text{ см} = 4 \text{ см}.$$

Поэтому

$$v_4 = \frac{4\text{ см}}{2\text{ с}} = 2 \text{ см/с}.$$

А.Мусин

Ф2463. *Металлический прут массой M согнули пополам так, что его части образуют прямой угол. Прут подвесили за середину одной из сторон угла на длинной нити, закрепленной на потолке. На другом конце этой стороны угла дизайнер закрепил маленький шарик, подобрав массу шарика таким образом, что верхняя сторона угла стала занимать горизонтальное положение.*

1) Чему равна масса m этого шарика?
2) Через некоторое время злоумышленники украли шарик. Из-за этого оставшаяся конструкция перешла в новое положение равновесия. Найдите угол α, который стал образовывать верхний стержень с горизонтом (концы стержня до пола или потолка не достают).

В первом случае верхняя часть прута горизонтальная и к ее середине прикреплена нить. Расстояния от середины (и места крепления нити) до конца прута, на котором закреплен шарик, и до места сгиба прута одинаковы. Из этого следует, что масса шарика равна половине массы всего прута:

$$m = \frac{M}{2}.$$

Когда шарик пропал, прут в положении равновесия будет висеть так, что его центр масс находится на той же вертикальной линии, что и натянутая нить. Нить прикреплена к середине одной половинки прута, а ее продолжение должно пройти через середину второй половинки прута. Отсюда следует, что верхняя часть прута будет составлять с горизонтом угол $\alpha = 45°$.

И.Шморин

Ф2464. *На плоский лист парафиновой бумаги (бумаги, пропитанной парафином), лежащий на горизонтальном столе, капнули воду, которая парафин не смачивает и поэтому собирается в каплю. Высота этой капли h, коэффициент поверхностного натяжения воды σ, радиус кривизны капли вблизи ее верхней точки R. Найдите площадь S_0 горизонтального участка поверхности капли, если масса капли m, плотность воды ρ, а ускорение свободного падения g.*

Физические величины, характеризующие каплю и указанные в условии (h, R, σ, m, ρ) не являются независимыми, т.е. их нельзя выбрать произвольными. Но раз уж они даны в условии, то будем считать, что их взаимосвязь «правильная».

Реальная площадь S_1 контакта воды с бумагой гораздо меньше площади S_0 почти горизонтального участка поверхности капли в ее нижней части. Это связано с тем, что между шершавой бумагой и каплей воды имеется множество участков небольшой толщины, сравнимой с размерами неровностей бумаги, которые заполнены воздухом при атмосферном давлении. Получается, что капля практически по всей своей поверхности соприкасается с воздухом, поэтому на каплю действует вверх выталкивающая сила, равная объему капли, умноженному на плотность воздуха и на ускорение свободного падения. Поскольку плотность воздуха значительно меньше плотности воды, можно эту выталкивающую силу не учитывать, т.е. можно вообще не рассматривать участие воздуха в уравновешивании всех сил, действующих на каплю.

Давление внутри капли вблизи ее самой верхней точки больше внешнего атмосферного давления на величину так называемого лапласовского давления

$$p_1 = \frac{2\sigma}{R}.$$

Давление воды, вблизи горизонтального участка поверхности капли больше p_1 на величину гидростатического давления $\rho g h$:

$$p_2 = \frac{2\sigma}{R} + \rho g h.$$

Сила, с которой вода капли действует сверху на тонкий слой воды вблизи горизонтального участка поверхности, равна $S_0 p_2$. Снизу на этот слой действует сила реакции бумаги. Масса этого тонкого слоя близка к нулю, поэтому бумага действует на тонкий слой воды с такой же по величине $\left(S_0 p_2\right)$, но противоположно направленной силой. На каплю воды действуют всего две силы: сила тяжести и сила реакции бумаги (взаимодействием капли с воздухом мы пренебрегли). Капля находится в покое, т.е. сумма всех сил, действующих на нее, равна нулю. Следовательно, выполняется соотношение

$$S_0\left(\frac{2\sigma}{R} + \rho g h\right) = mg,$$

откуда находим

$$S_0 = \frac{mg}{(2\sigma/R) + \rho g h}.$$

Г.Насыров

Задачи

1. Юные математики Антон, Боря, Вася, Гриша, фамилии которых Антонов, Борисов, Васильев и Григорьев, два раза пили чай за круглым столом. Первый раз Антон сидел напротив Антонова, а Боря сидел рядом с Васильевым. Второй раз Гриша

сидел напротив Борисова, а Васильев – рядом с Антоном. У кого какая фамилия, если известно, что никакие двое юных математиков не сидели два раза друг напротив друга? Объясните, как вы получили ответ.

Н.Чернятьев

2. Инопланетянин встретил мальчика и попытался угадать, как его зовут. Он перебрал такие варианты имени: Пуля, Мышь, Диск, Дыня, Липа, Морс, но не угадал. Зато оказалось, что в каждом из вариантов он угадал хотя бы одну букву (причем эта буква стоит на том же месте, что и в имени мальчика, которое тоже состоит из 4 букв).

Как могли звать этого мальчика? (Достаточно привести одно подходящее имя.)

Е.Бакаев, Н.Чернятьев

3. Паша расставил по кругу в некотором порядке 15 плюсов и 15 минусов. Витя хочет заменить некоторые из знаков на

противоположные так, чтобы не было двух рядом стоящих одинаковых знаков. Докажите, что в любом случае он может добиться этого, сделав не более 14 исправлений.

Н.Чернятьев

4. У Веры есть восемь золотых шариков: четыре по 1 грамму и четыре по 2 грамма. Все шарики выглядят одинаково и на ощупь не различимы. Вера не помнит, какой из них какой. Ей нужно разделить шарики на две кучки одинаковой массы. В распоряжении Веры есть электронные весы, которые показывают вес груза, который на них положили. Но в весах практически села батарейка, и ее может хватить только на 2 взвешивания. Помогите Вере справиться с задачей.

Н.Чернятьев

Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на Костромском областном турнире юных математиков.

Знание – сила!

С.КУЗНЕЦОВ

В этой статье мы обсудим несколько задач, слегка необычных с математической точки зрения. В этих задачах нам будет интересно не только *истинны* или *ложны* некоторые высказывания, но и *знают* ли об истинности этих высказываний персонажи, действующие в задачах.

Задача 1. *Илье Муромцу, Добрыне Никитичу и Алеше Поповичу за верную службу дали 6 монет: 3 золотых и 3 серебряных. Каждому досталось по две монеты. Илья Муромец не знает, какие монеты достались Добрыне, а какие Алеше, но знает, какие монеты достались ему самому. (Также Илья знает, что монет всего 6, по 3 каждого металла, и что каждому досталось по две монеты.) Требуется задать Илье Муромцу один вопрос, предполагающий ответ «да» или «нет», и по ответу на этот вопрос выяснить, какие монеты ему достались.*

С виду кажется, что задача неразрешима: вариантов того, какие монеты у Ильи, три (две золотые, две серебряные, золотая и серебряная), а вариантов ответа всего два, «да» или «нет». Но есть и третий возможный ответ – «не знаю». Чтобы получить его, нужно спрашивать не о монетах Ильи, а о монетах *других* богатырей. Однако тогда может показаться, что ответ будет всегда «не знаю»: ведь даже в условии прямо сказано, что Илья Муромец не знает о монетах Добрыни и Алеши.

Тем не менее, некоторую информацию об этих монетах Илья может *вычислить,* зная только свои монеты. Например, если у Ильи Муромца две золотые монеты, то он знает, что осталась только одна золотая монета. Значит, ни у Добрыни, ни у Алеши не может оказаться двух золотых монет. Зато заведомо у кого-то из них обе монеты серебряные. Это соображение и приводит нас к ответу: нужно задать вопрос «Верно ли, что у кого-то их двух других богатырей обе монеты – серебряные?»

Запишем возможные ситуации коротко: буква «З» означает золотую монету, «С» – серебряную. Сначала идут монеты Ильи, потом Добрыни, потом Алеши. Например, «ЗЗ;СС;ЗС» означает, что у Ильи 2 золотые монеты, у Добрыни 2 серебряные, а у Алеши 1 золотая и 1 серебряная. На рисунке 1 возможные ситуации разделены на

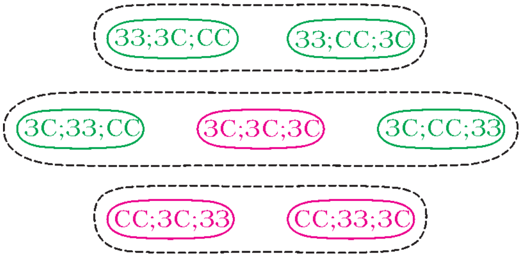


Рис. 1

три группы. В каждой группе ситуации *неразличимы* с точки зрения Ильи Муромца: он-то видит только свои монеты. Кроме того, ситуации расцвечены: зеленым цветом обозначены те, в которых истинный ответ на наш вопрос «да»; красным – в которых ответ «нет».

Теперь видно, что в средней группе, когда у Ильи золотая и серебряная монеты, есть как «красные», так и «зеленые» ситуации. Значит, Илья даже теоретически не может, опираясь на знания о своих монетах, ответить на вопрос, и он скажет «не знаю». В верхней группе обе ситуации «зеленые», и Илья, проведя такое же рассуждение, как и мы сейчас, ответит «да». В нижней группе, наоборот, обе ситуации «красные», и ответ будет «нет».

Чтобы наши рассуждения имели силу, нужны два предположения о богатыре, которого мы спрашиваем:

1. Богатырь *честен,* т.е. отвечает на наши вопросы правдиво.

2. Богатырь *умен,* т.е. говорит «не знаю» только в том случае, когда получить ответ, исходя из доступной ему информации, *теоретически невозможно.* Это условие позволяет Илье Муромцу использовать *косвенное знание* о монетах других богатырей.

Второе условие не так безобидно, как может показаться на первый взгляд. Чтобы осознать это, посмотрим, например, на шахматную игру и зададимся вопросом: у какого из игроков (играющего за черных или за белых) есть *стратегия,* позволяющая заведомо, независимо от коварства противника, выиграть или хотя бы свести игру к ничьей? Количество всевозможных шахматных партий хоть и астрономически велико, но все-таки не бесконечно. Значит, теоретически возможно проанализировать все возможные партии и дать ответ на этот вопрос (кроме этого, можно доказать, что либо ровно у одного из игроков есть выигрывающая стратегия, либо у обоих есть стратегия, приводящая к ничьей). Этот ответ будет логически следовать из правил игры, т.е., по нашему условию, должен быть известен любому, кто эти правила знает. В реальности, однако, ответ неизвестен никому. Другой пример, более близкий к математике: поскольку все теоремы, скажем, школьного курса геометрии логически следуют из аксиом, то по нашему условию получилось бы, что тот, кто выучил все аксиомы, автоматически знает все теоремы. На самом деле, конечно, для этого требуется более длительное обучение, а всех возможных теорем не знает никто.

Эта трудность обычно называется *проблемой логического всезнания.* Она возникает в случаях, когда число возможных ситуаций настолько велико, что человек или даже компьютер оказывается неспособным их перебрать, или когда оно вообще бесконечно. В наших примерах это число невелико, и мы можем смело пользоваться вторым условием.

Теперь обсудим классическую задачу о *чумазых детях.*

Задача 2. *Несколько детей вернулись с прогулки, и папа сказал, что у некоторых (хотя бы у одного) из них лица перепачканы грязью. Каждый ребенок видит лица других детей, но не свое собственное. Папа спрашивает, знает ли кто-нибудь из детей, что он сам чумазый. Дети отвечают «нет». Потом папа задает тот же вопрос еще раз, потом еще раз... Поймет ли кто-то из детей, что он сам чумазый?*

Казалось бы, ничего не меняется, и дети всегда будут говорить «нет». Однако каждый раз ребенок получает *знание о незнании других,* и эта информация может помочь ему догадаться, чумазый ли он сам.

Чтобы лучше понять, что происходит, рассмотрим случай, когда детей всего трое и два из них – второй и третий – чумазые, а первый чист. Кто чумазый, а кто чистый, знаем мы (и папа), но не сами дети. Поэтому нужно рассматривать все потенциально возможные ситуации, и мы будем для краткости обозначать чумазого ребенка цифрой 1, а чистого – цифрой 0: например, 010 означает, что первый и третий чисты, второй чумаз.

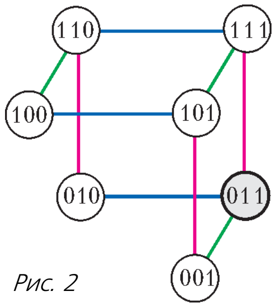


Рис. 2

Возможные случаи удобно изобразить в виде куба (рис. 2). Здесь две ситуации соединены красным отрезком, если они неотличимы с точки зрения первого ребенка (он не знает, чумаз ли он сам, поэтому не может отличить, например, 001 от 101). Зеленые отрезки соединяют ситуации, неотличимые вторым, синие – третьим ребенком. Одной вершины в этом кубе недостает: раз сказано, что чумазые есть, случай 000 невозможен.

Посмотрим теперь, что изменится после первого вопроса. В ситуациях, когда чумазый ребенок ровно один (например, 100), этот ребенок сразу понимает, что он чумазый. Значит, если все ответили «нет», то эти ситуации невозможны и, что нам особенно важно, *об этом теперь знают все дети!* Получается картинка, изображенная на рисунке 3.

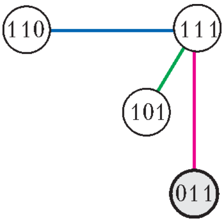


Рис. 3

Теперь уже «крайними» оказались 110, 101 и 011. Когда папа второй раз задает тот же вопрос, в ситуации 011 второй и третий ребенок уже знают, что они чумазые.

А сможет ли первый ребенок догадаться, что он чистый? Попробуйте ответить на этот вопрос сами.

Если все дети были чумазыми (случай 111), то потребуется еще один вопрос: после первого вопроса отсекаются случаи 100, 010 и 001, после второго – 110, 101 и 011, и перед третьим вопросом все дети уже знают, что единственно возможная ситуация – 111.

Ясно, что так же можно рассуждать и когда детей больше трех. Если чумазый ровно один, то он поймет это после первого вопроса (он знает, что чумазые есть, но не видит ни одного – значит, чумаз он сам). Если все ответили «нет», то ситуации с одним чумазым отсекаются, значит, чумазых хотя бы двое. Если их действительно двое, это выявляется после второго вопроса. Иначе все узнают, что чумазых хотя бы трое, и так далее.

Рассказанным в этой статье способом можно решать разнообразные задачи, где участники что-то знают или не знают друг о друге и обмениваются этой информацией. Вот три такие задачи.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3. Король позвал к себе трех мудрецов и посадил их так, чтобы они видели друг друга, но не себя. После этого он показал им 3 красных и 2 белых колпака и сказал, что наденет на каждого один из этих колпаков. Сделав это (и спрятав оставшиеся два колпака), король спросил по очереди у каждого из мудрецов, знает ли он цвет колпака, который на него надет. Первый и второй мудрец ответили «нет», а третий сказал, что знает. Какого цвета колпак король надел на третьего мудреца?

Задача 4. Король позвал к себе трех других мудрецов, показал им три колпака – красный, синий и желтый – и надел каждому мудрецу на голову по колпаку. Казалось бы, видя два колпака на головах своих коллег, каждый мудрец легко догадается о цвете своего колпака. Однако у мудрецов проблемы со зрением: первый не отличает синего от желтого, второй – желтого от красного, а третий – красного от синего. Поэтому великодушный король объявил дополнительно, что из утверждений «На голове первого мудреца красный колпак» и «На голове второго мудреца синий колпак» верно не более одного. После этого король последовательно спросил первого и третьего мудреца, знают ли они свои колпаки, и оба ответили «не знаю». Какого цвета колпак король надел на первого мудреца?

Задача 5. Каждому из двух гениальных математиков сообщили по натуральному числу, причем им известно, что эти числа отличаются на единицу. Они поочередно спрашивают друг друга: «Известно ли тебе мое число?» Докажите, что рано или поздно кто-то из них ответит «да». Сколько вопросов они зададут друг другу? (Математики предполагаются правдивыми, бессмертными и, разумеется, гениальными.)

Напоследок же разберем еще одну забавную задачку.

Задача 6. *При дворе короля Правдоруба все издревле говорили только правду и доверяли друг другу. Но однажды король пригласил к себе трех своих придворных мудрецов и объявил им: «Среди вас хотя бы один – лжец!» Мудрецы задумались: кто же среди них предатель? Кто нарушил древний обычай? Король спросил первого мудреца: «Знаешь ли ты, кто из вас лжецы, а кто говорит правду?» Первый мудрец ответил: «Не знаю». Король задал тот же вопрос второму мудрецу. Тот ответил: «Знаю». Наконец, третьего мудреца король спросил: «Сможешь ли ты назвать хотя бы одного лжеца?» На это третий мудрец ответил: «Да, смогу». А кто на самом деле лжец?*

В этой задаче, в отличие от предыдущих, нарушено первое условие: участники могут говорить неправду. При этом, как обычно негласно предполагается в задачах «про рыцарей и лжецов», лжец говорит неправду *всегда* (таким образом, он не настолько коварен, чтобы иногда – когда ему выгодно – говорить правдиво). Кроме того, предполагается, что лжецы, если их несколько, не находятся в сговоре: каждый лжец не знает о других лжецах.

Первый мудрец, независимо от того, лжец он или правдивый, не может знать ответ на вопрос короля. Значит, он сказал правду и поэтому не является лжецом. Таким образом, возможны три ситуации: ППЛ, ПЛП, ПЛЛ («П» означает говорящего правду, «Л» – лжеца; известно, что хотя бы один лжец есть). С точки зрения второго мудреца вторая и третья ситуации неразличимы между собой (и отличимы от первой). В первой ситуации он знает, кто лжец, и правдиво говорит «знаю». Во второй и третьей второй мудрец не знает ответа, но при этом он лжец и тоже говорит «знаю». Таким образом, ответ второго мудреца не дает ни нам, ни третьему мудрецу никакой новой информации. Наконец, с точки зрения третьего мудреца неотличимы ситуации ППЛ и ПЛЛ, но его король просит назвать хотя бы одного лжеца, и он мог бы назвать себя. Значит, сказав «да, смогу», он сказал правду, что противоречит тому, что он лжец. Значит, имеет место ситуация ПЛП: первый и третий мудрецы говорят правду, второй лжец.

Задачи, о которых говорилось в этой статье, относятся к ведомству *модальной логики* – таким образом, мы познакомились с азами этой науки.

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Итоги конкурса 2016/17 учебного года

Лучших результатов добились следующие школьники:

Бирюлин Алексей – Москва, школа 1363, 4 кл.,
Павлова Деница – Болгария, София, Софийская математическая гимназия, 9 кл.

Жюри конкурса также отмечает хорошие работы следующих школьников:

Антоненко Екатерина – Костромская область, деревня Кузьмищи, Кузьмищенская средняя школа, 8 кл.,
Данилин Иван – Москва, школа 179, 7 кл.,
Коноплев Максим – Москва, школа 1329, 6 кл.,
Красиков Антон – Украина, Киев, лицей 142, 7 кл.,
Олжабаев Асылбек – Казахстан, Алматы, Назарбаев Интеллектуальная школа физико-математического направления, 8 кл.,
Тимонина Мария – Краснодар, гимназия 92, 9 кл.

Среди команд лучший результат показали участники математического кружка Гатчинского и Лужского районов Ленинградской области (руководитель Павлов Сергей Павлович):

Иванов Олег – Луга, школа 3, 5 кл.,
Еремеев Семен – Гатчина, лицей 3, 6 кл.,
Иванов Илья – Луга, школа 6, 7 кл.,
Забиякин Сергей – Гатчина, школа 9, 9 кл.,
Лукашов Никита – Сиверская гимназия Гатчинского района, 9 кл.,
Морозова Екатерина – Гатчина, лицей 3, 9 кл.,
Сычикова Мария – Сиверская гимназия Гатчинского района, 9 кл.

Поздравляем!

Победителям и призерам будут высланы дипломы журнала «Квант», а также призы от издательства МЦНМО и фонда «Математические этюды».

Чудо стеклянной линзы

А.СТАСЕНКО

Стекло..., некогда продававшееся по цене золота, в руках европейцев стало дороже золота. Сальвино или, может быть, кто другой, отполировав первую линзу, положил начало инструменту, с помощью которого людям определено открыть мириады небесных миров, упорядочить исчисление времени, навести порядок в мореплавании и развивать величайшую из наук, какими может гордиться человеческий разум.

И.Гердер. Идеи к философии истории человечества

Однажды обыкновенной мухе вздумалось летать по окружности вокруг фокуса обыкновенной линзы, причем в плоскости, содержащей ось симметрии (рис.1). Начался полет в точке *1* и совершался, как положено в физике, против часовой стрелки (положительное направление обхода вокруг точки F).

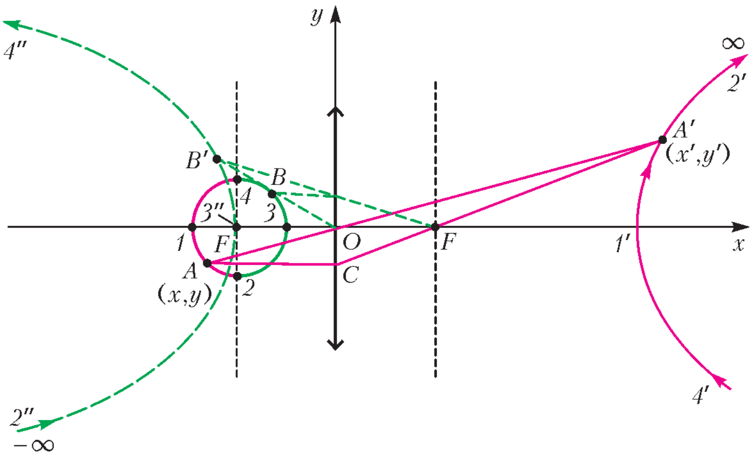


Рис. 1. Построение изображения окружности в положительной линзе. Вертикальные штриховые линии – фокальные плоскости линзы. Красные линии – действительные изображения, зеленые – мнимые (построение приблизительное; желающие могут провести точный расчет)

Конечно, муху очень интересовало движение ее изображения в линзе. Найдем и мы эту траекторию.

Все знают известную формулу линзы и правила построения изображения в ней. Запишем формулу линзы в виде

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}=\frac{1}{F},$$

где x – расстояние от предмета до линзы, x' – расстояние от линзы до изображения и F – фокусное расстояние линзы. А теперь построим изображение любой точки траектории мухи, например точки A: проведем луч AC, параллельный оптической оси; преломившись в линзе, он просто обязан пройти через фокус F; другой луч AO пройдет через оптический центр линзы не преломляясь (пусть линза будет тонкой); пересечение этих двух лучей и дает точку A' – изображение точки A. И так, точка за точкой, построим изображение *1′A′2′* (красная линия) первой четверти окружности *1A2*. Но что это? Точка *2′* ушла в бесконечность, а муха всего лишь спокойно пересекла фокальную плоскость в точке *2*! Но не будем притворно удивляться – изображение вернется из бесконечно удаленной точки *2″*, а изображение участка *234* траектории будет выглядеть в виде кривой *2″3″4″*, показанной на рисунке зеленым пунктиром (мнимое изображение). И все это нам понадобилось, чтобы напомнить школьный материал о построении изображений в линзе.

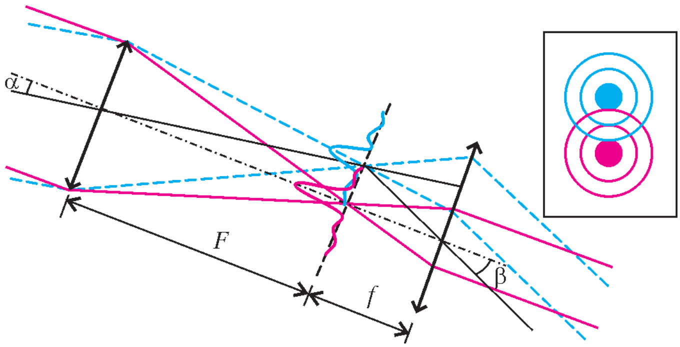


Рис. 3. Ход лучей в телескопе от двух звезд. Справа – дифракционная картина в фокальной плоскости объектива

В математическом смысле, линза устанавливает соответствие между точкой (x, y) – оригиналом и точкой (x', y') – изображением:

$$x \leftrightarrow x' = \frac{1}{\frac{1}{F} - \frac{1}{x}},$$

$$y \leftrightarrow y' = \frac{y}{\frac{x}{F} - 1}.$$

Используя эти формулы, можно найти изображение – кривую $y'(x')$, – например, нашей окружности с радиусом $R < F$, заданной уравнением $x^2 + y^2 = R^2$.

С практической точки зрения, линза полезна тем, что может обеспечить увеличение размера изображения в $\left|\frac{y'}{y}\right|$ раз. Из рисунка 2 видно, что $\left|\frac{y'}{y}\right| > 1$ только в том случае, когда рассматриваемый предмет расположен к линзе ближе чем $2F$; удаленные предметы – не увеличить. Это всего лишь *лупа*.

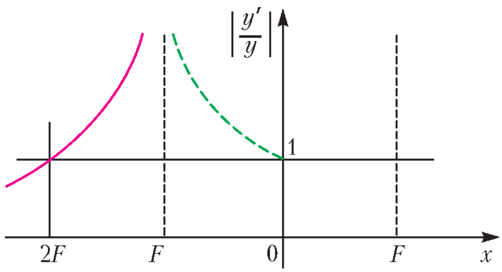


Рис. 2. Увеличение в линзе в зависимости от положения объекта слева от нее

Но однажды Некто (по одним сведениям – любопытный ученик Галилея, по другим – голландский моряк), играя с двумя линзами, расположил их друг за другом и ахнул: удалось получить увеличенное изображение удаленных предметов! Так была открыта «ночезрительная труба», или *телескоп*.

Идея классического телескопа проста: нужно две линзы с различными фокусными расстояниями F и f расположить так, чтобы их оптические оси и положения одних фокусов совпали (рис.3). Пучок лучей, идущих от бесконечно удаленной звезды параллельно оптической оси (красные линии), соберется в точке F – фокусе объектива, а затем, пройдя через окуляр, снова станет параллельным. Тут пока что ничего не удалось увеличить – разве что плотность потока энергии, попавшей в объектив. Но вот другая звезда, расположенная на небесной сфере под малым углом α по отношению к первой, дает другой пучок лучей (синие линии), который пройдет через окуляр уже под другим малым углом β. И если $F > f$, то $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{F}{f} > 1$ – мы получим увеличенный угол!

Теперь все ясно: нужно взять отношение фокусов равным тысяче, миллиону, миллиарду... – и можно будет рассматривать мелкие камешки на Луне!?

Увы – тут радость, порожденная геометрическими построениями, наталкивается на ограничение, налагаемое физической оптикой. Дело в том, что свет, как и всякое излучение, характеризуется длиной волны. Для видимого света ее величина λ, как известно, заключена где-то между 0,4 и 0,8 микрона, значит, среднее значение составляет около

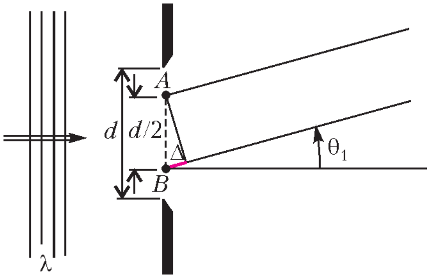


Рис. 4. Щель в плоском экране и направления, в которых волна, прошедшая через щель, гасит сама себя

0,6 микрона. И тут приходят на ум такие рассуждения.

Рассмотрим бесконечную щель шириной d в экране, на который слева перпендикулярно падает волна длиной λ (рис.4). Представим себе кусок фронта, вырезанный щелью, в виде двух полос, каждая из которых является источником вторичной волны (принцип Гюйгенса). Очевидно, что существует такой угол θ_1, под которым лучи, испущенные точками (линиями) A и B, будут иметь разность хода $\Delta = AB\sin\theta_1$. И если эта разность равна $\frac{\lambda}{2}$, то в направлении θ_1 волны погасят друг друга:

$$\frac{d}{2}\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{2}.$$

Уже этого достаточно, чтобы понять, что́ происходит при проникновении света звезды через объектив диаметром d. Конечно, объектив не щель, но ясно, что суть явления остается прежней, а точное значение θ_1 определяется условием

$$\sin\theta_1 = 1{,}22\frac{\lambda}{d}. \qquad (*)$$

Значит, свет, пришедший от одной звезды, соберется объективом не в точку, а в светлое пятно, окруженное кольцами, – так же, как и от другой звезды (см. рис.3, справа). И чтобы эти пятна не наложились друг на друга, угловое расстояние между звездами не должно быть слишком малым: $\alpha \ge \theta_1$. Иначе звезды не различить как отдельные объекты.

Теперь понятно, почему объективы телескопов стремятся делать как можно больше. Уже существуют телескопы с диаметром объектива d = 6 м. Сварить стекло такой многотонной линзы не просто – а еще нужно около года аккуратно охлаждать его, чтобы в его теле не возникли ни трещины, ни пузырьки.

Сравним, во сколько раз больше звезд можно различить (физики говорят – разрешить) при помощи такого телескопа, чем увидеть невооруженным глазом. Пусть зрачок глаза (там ведь тоже линза) имеет диаметр d = 3 мм (при этом обеспечивается наиболее четкое изображение на сетчатке); тогда отношение линейных углов θ_1 будет равно двум тысячам, а телесных углов (по вертикали и по горизонтали) – четырем миллионам!

Рассмотрим подробнее дифракцию света на зрачке. Согласно условию (*), оптическая разрешающая способность зрачка ограничена углом

$$\theta_{\min} \approx 1{,}22\frac{0{,}6\cdot10^{-6}\ \text{м}}{3\cdot10^{-3}\ \text{м}} \approx 0{,}244\cdot10^{-3}\ \text{рад} \approx$$
$$\approx 1{,}4\cdot10^{-2}\ \text{град} \approx 50\ \text{угловых секунд}.$$

(Здесь учтено, что при малых значениях угла $\sin\theta \approx \theta$.)

Когда человек хочет рассмотреть какой-либо объект, глаз поворачивается так, что изображение проецируется на «желтое пятно» сетчатки, в котором 15000 колбочек выстилают площадку размером около 1,5 градусов. Таким образом, на каждую колбочку приходится угол

$$\theta_0 \approx \frac{1{,}5\ \text{град}\cdot3600\ \text{угл.с/град}}{\sqrt{15000}} \approx$$
$$\approx 45\ \text{угловых секунд},$$

практически равный углу, разрешаемому зрачком при учете дифракции.

Как тут не восхититься мудрой Природой, отлично «знающей» и физическую, и геометрическую оптику!

Но вернемся к обыкновенной стеклянной линзе. Расположив некий любимый образ на том месте, где летала муха (рис.5), постройте его изображение – и вы получите удовольствие.

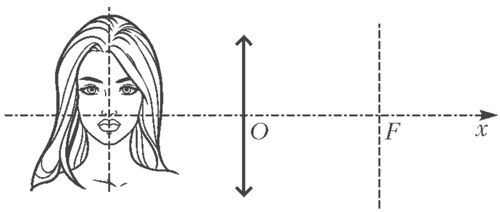


Рис. 5. Как построить изображение?

Алгебра и геометрия комплексных чисел

А.КАНУННИКОВ

Геометрия комплексных чисел

§5. Геометрический смысл умножения на комплексное число

Когда я учился на пятом курсе мехмата МГУ, нам читали лекции по философии математики. На одной из них лектор рассказал, какие представления о числах царят в философии: «Произведение положительных чисел имеет ясную геометрическую природу – площадь прямоугольника. Но действия с отрицательными числами (вроде «минус на минус – плюс») и уж тем более с комплексными – не имеют никакого геометрического или физического смысла, это плод работы математического разума». Несколько удивившись, я подошел во время перерыва к лектору и объяснил геометрическую интерпретацию равенств $(-1)(-1)=1$ и $i\cdot i=-1$. Настала лектору очередь удивляться...

9. Попробуйте и вы объяснить геометрический смысл этих равенств. Для этого по данному числу $z\neq 0$ отметьте на комплексной плоскости числа $-z$ и iz.

Читатель, выполнивший это упражнение, понял геометрический смысл умножения на число i. Чтобы прояснить, как геометрически происходит умножение на любое ненулевое комплексное число z, запишем его в *тригонометрической форме*:

$$z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi). \qquad (8)$$

Здесь число $\varphi\in\mathbb{R}$ определено по модулю 2π; оно называется *аргументом* числа z (рис. 1).

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

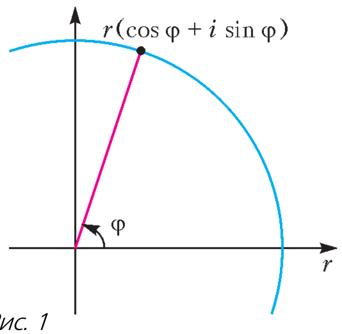


Рис. 1

Примеры:

- $5=5(\cos 0+i\sin 0)$,
- $-2=2(\cos\pi+i\sin\pi)$,
- $-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$,
- $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,
- $\cos\varphi-i\sin\varphi=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)$,
- $\sin\varphi+i\cos\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$.

10. Запишите в тригонометрической форме: а) $\sqrt{3}-i$; б) $1+\left(2-\sqrt{3}\right)i$;

в) $1+\cos\varphi+i\sin\varphi$ при $\cos\varphi\neq -1$.

Замечание. Алгебраическая форма записи комплексных чисел ($z=x+yi$) отвечает декартовой системе координат (действительная часть – абсцисса, мнимая – ордината), а тригонометрическая – полярной (модуль $|z|$ – радиус-вектор точки z, аргумент φ – ее полярный угол).

Очевидно, умножение на $|z|$ – это гомотетия (растяжение) с коэффициентом $|z|$ с центром в нуле. Перемножим теперь два числа с модулем 1:

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\psi+i\sin\psi)=$$
$$=\underbrace{(\cos\varphi\cos\psi-\sin\varphi\sin\psi)}_{\cos(\varphi+\psi)}+$$
$$+\ i\underbrace{(\cos\varphi\sin\psi+\sin\varphi\cos\psi)}_{\sin(\varphi+\psi)}. \qquad (9)$$

Такое впечатление, будто формулы тригонометрии нарочно придуманы для перемножения комплексных чисел! Что ж, можно и так сказать. В любом случае, именно на выкладке (9) основана тесная связь тригонометрии и комплексных чисел, о которой мы писали в статье «Магия комплексных чисел».

Теорема 1. *При всех $r > 0$ и $\varphi \in \mathbb{R}$ отображение $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, действующее по формуле*

$$w \mapsto r(\cos\varphi + i\sin\varphi)w, \qquad (10)$$

является композицией (в любом порядке) гомотетии с коэффициентом r и поворота на угол φ с центрами в нуле.

Теорема фактически доказана: достаточно расписать w в тригонометрической форме $|w|(\cos\psi + i\sin\psi)$ и воспользоваться выкладкой (9). Впрочем, от такого доказательства вполне может остаться чувство неудовлетворенности, ведь мы просто свели дело к формулам тригонометрии

$$\begin{aligned}\cos(\varphi+\psi) &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi,\\ \sin(\varphi+\psi) &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi.\end{aligned} \qquad (11)$$

Хотя они входят в школьные учебники, мы приведем их вывод, причем тем способом, который считаем наиболее концептуальным и который полностью проясняет связь с комплексными числами.

Напомним, что косинус и синус действительного числа определяются как раз через поворот. Обозначим через $\mathcal{R}_\varphi$ поворот на угол φ против часовой стрелки вокруг начала координат. Пусть $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ – *положительный ортонормированный базис* на плоскости, т.е. $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ и $\mathcal{R}_{\pi/2}(\vec{e}_1) = \vec{e}_2$. Функции cos, sin: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяются так:

$$\mathcal{R}_\varphi(\vec{e}_1) = \vec{e}_1\cos\varphi + \vec{e}_2\sin\varphi. \qquad (12)$$

Ясно, что $(\mathcal{R}_\varphi(\vec{e}_1), \mathcal{R}_\varphi(\vec{e}_2))$ – положительный ортонормированный базис. Разложим по нему вектор (рис.2):

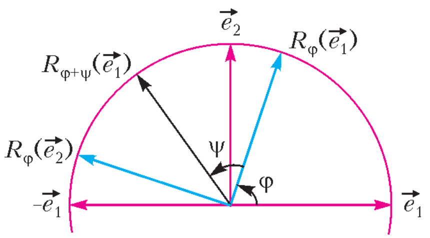


Рис. 2

$$\mathcal{R}_{\varphi+\psi}(\vec{e}_1) = \mathcal{R}_\psi(\mathcal{R}_\varphi(\vec{e}_1)) =$$
$$= \mathcal{R}_\varphi(\vec{e}_1)\cos\psi + \mathcal{R}_\varphi(\vec{e}_2)\sin\psi. \qquad (13)$$

Поскольку $(\vec{e}_2, -\vec{e}_1)$ – положительный ортонормированный базис, то

$$\mathcal{R}_\varphi(\vec{e}_2) = \vec{e}_2\cos\varphi + (-\vec{e}_1)\sin\varphi. \qquad (14)$$

Подставим теперь (12) и (14) в правую часть равенства (13):

$$\begin{aligned}\cos\psi(\vec{e}_1\cos\varphi + \vec{e}_2\sin\varphi) + \sin\psi(\vec{e}_2\cos\varphi - \vec{e}_1\sin\varphi) &=\\ = \vec{e}_1(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) &+\\ +\vec{e}_2(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi). &\qquad (15)\end{aligned}$$

Осталось вспомнить про левую часть (13), равную $\vec{e}_1\cos(\varphi+\psi) + \vec{e}_2\sin(\varphi+\psi)$, и приравнять коэффициенты при $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Получатся как раз формулы (11).

Замечание. Минус в первой из формул (11) и в ее частном случае $\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi$ (формуле приведения) появляется при повторном повороте на прямой угол: $\vec{e}_1 \mapsto \vec{e}_2 \mapsto -\vec{e}_1$. Таким образом, это тот самый минус из равенства $i^2 = -1$!

Из теоремы 1 или, если угодно, из выкладки (9) следует формула Муавра:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \qquad (16)$$

Мы уже писали о ней в «Магии комплексных чисел» (с.9), но только теперь она стала прозрачной: повернуть n раз на угол φ – все равно что повернуть на угол $n\varphi$.

11. Найдите все такие $n \in \mathbb{Z}$, при которых $(\sin\varphi + i\cos\varphi)^n = \sin n\varphi + i\cos n\varphi$ для всех $\varphi \in \mathbb{R}$.

12. Проекция полуокружности на ось тангенсов. Докажите, что для всех $z \in \mathbb{C}$

$$|z| = 1 \neq z \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R} \ \ z = \frac{x+i}{x-i}.$$

§6. Корни из комплексных чисел

Долгое время оставалось загадкой, можно ли извлекать корни любых степеней из комплексных чисел и не нужно ли поэтому числовую систему расширять дальше. Это стало ясно лишь в начале XVIII века с открытием Муавром формулы (16), т.е. спустя почти два века как появились комплексные числа и почти век как их стали изображать на плоскости.

Напомним, $\sqrt[n]{w} = \{z \mid z^n = w\}$. Чтобы найти все корни n-й степени из ненулевого числа w, запишем его в тригонометрической форме, $w = R(\cos\psi + i\sin\psi)$, и будем искать решения уравнения $z^n = w$ также в тригонометрической форме, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. С учетом формулы (16) имеем

$$z^n = w \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = R(\cos\psi + i\sin\psi) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^n = R, \\ n\varphi = \psi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{R}, \\ \varphi = \dfrac{\psi + 2\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Поскольку угол φ считается по модулю 2π, то в последней формуле можно ограничиться значениями $k = 0, \ldots, n-1$. Так получается следующая теорема.

Теорема 2 (вторая формула Муавра, 1707). *Для всех $R > 0$ и $\psi \in \mathbb{R}$ имеем*

$$\sqrt[n]{R(\cos\psi + i\sin\psi)} = \left\{\sqrt[n]{R}\left(\cos\frac{\psi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\psi+2\pi k}{n}\right),\ k = 0,\ldots,n-1\right\}. \quad (17)$$

Таким образом, существует ровно n корней n-й степени из $w \neq 0$ – они лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{|w|}$ и образуют вершины правильного n-угольника.

Отдельного внимания заслуживает случай $w = 1$:

$$\boxed{\sqrt[n]{1} = \left\{\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\,\middle|\, k = 0,\ldots,n-1\right\}.} \quad (18)$$

13. Пример. *Пусть $A_1 \ldots A_n$ – правильный n-угольник, вписанный в окружность с центром O. Докажем, что $\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}$.*

Геометрически. Повернем все векторы $\overrightarrow{OA_k}$ на угол $2\pi/n$ в одном направлении вокруг точки O, тогда их сумма, с одной стороны, повернется на тот же угол, а с другой – не изменится (векторы перейдут друг в друга), значит, эта сумма равна нулю. (Это решение задачи 5 из «Магии комплексных чисел».)

Алгебраически (то же рассуждение). Можно считать, что плоскость комплексная и что $\{A_1,\ldots,A_n\} = \sqrt[n]{1}$. Обозначим $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ и $S = 1 + \varepsilon + \ldots + \varepsilon^{n-1}$. Надо доказать, что $S = 0$. При умножении суммы S на ε все слагаемые сдвигаются по циклу, поэтому $S\varepsilon = S$, откуда $S = 0$.

Другое объяснение. Мы знаем, что $z^n - 1 = (z-1)(z-\varepsilon)\ldots(z-\varepsilon^{n-1})$. При раскрытии скобок коэффициент при z^{n-1} равен $-S$. Но в двучлене $z^n - 1$ он равен нулю. Значит, $S = 0$.

14. а) Докажите: $\sqrt[m]{1} \cap \sqrt[n]{1} = \sqrt[(m,n)]{1}$. б) Вычислите $\sqrt[m]{-1} \cap \sqrt[n]{-1}$.

Разберем пункт а).

I способ. Ясно, что $\sqrt[(m,n)]{1} \subseteq \sqrt[m]{1} \cap \sqrt[n]{1}$. Обратно, пусть $\alpha \in \sqrt[m]{1} \cap \sqrt[n]{1}$, т.е. $\alpha^m = \alpha^n = 1$. По алгоритму Евклида, $(m,n) = um + vn$ для некоторых $u, v \in \mathbb{Z}$. Отсюда

$$\alpha^{(m,n)} = \alpha^{um+vn} = (\alpha^m)^u (\alpha^n)^v = 1.$$

II способ (для знакомых с НОД и алгоритмом Евклида для многочленов). Докажем индукцией по $m + n$ эквивалентное утверждение: $(x^m - 1, x^n - 1) = x^{(m,n)} - 1$. Если $m + n = 2$, т.е. $m = n = 1$, то это очевидно. Шаг индукции при $m \geq n$:

$$(x^m - 1, x^n - 1) = (x^m - x^n, x^n - 1) = (x^{m-n} - 1, x^n - 1) = x^{(m-n,n)} - 1 = x^{(m,n)} - 1.$$

15. Решите уравнения над $\mathbb{C}$: а) $z^8 = \bar{z}^7$; б) $z^5 = |z|^5$; в) $(1 + z + z^2 + \ldots + z^n)^2 = z^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$; г) $(1 + z + z^2 \ldots + z^m)(1 + z + z^2 \ldots + z^n) = \left(1 + z + z^2 \ldots + z^{\frac{m+n}{2}}\right)^2$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$ одной четности, $m < n$.

а) **Решение.** Из уравнения следует, что $|z|^8 = |z|^7$, откуда $|z| = 0$ или $|z| = 1$. Отметим, что $z = 0$ – корень. При $|z| = 1$ пусть $\varphi = \arg z$. Тогда

$$z^8 = \bar{z}^7 \Leftrightarrow 8\varphi = -7\varphi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $z = 0$, $\cos\frac{2\pi k}{15} + i\sin\frac{2\pi k}{15}$, $k = 0, \ldots, 14$.

16. Решите уравнение

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \frac{1}{2} = 0 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

17. Как связаны множества $(=, \subseteq, \supseteq)$ для произвольного $z \in \mathbb{C}$ и $m, n \in \mathbb{N}$: а) $\sqrt[mn]{z^m}$ и $\sqrt[n]{z}$; б) $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m$ и $\sqrt[n]{z^m}$.

18. Докажите, что $\sqrt[m]{1}\sqrt[n]{1} = \sqrt[mn]{1} \Leftrightarrow (m, n) = 1$.

19. Является ли число $\frac{2+i}{2-i}$ корнем из единицы?

В следующем параграфе мы покажем, насколько полезными могут быть комплексные числа при решении геометрических задач. Но сначала – небольшой тест.

20. Отметьте на следующих картинках (рис.3) указанные числа с помощью циркуля и линейки. Всюду нарисована единичная окружность. Подумайте, в каких пунктах можно обойтись без нее.

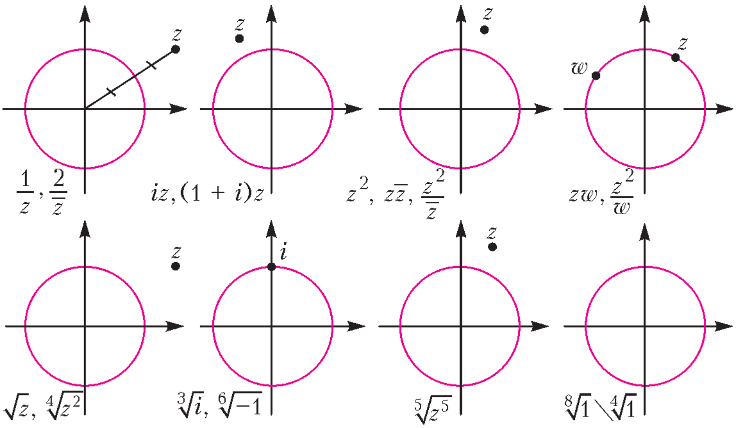


Рис. 3

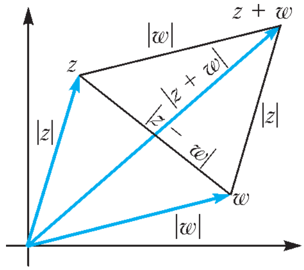


Рис. 5

§7. Комплексные числа и геометрия помогают друг другу

Комплексные числа с успехом применяются для решения геометрических задач и, наоборот, многие утверждения о комплексных числах доказываются геометрически. Например, из геометрического смысла модуля $|z - w|$ как расстояния между точками z и w следуют *неравенства треугольника* (рис.4):

$$|z + w| \le |z| + |w|, \quad \big||z| - |w|\big| \le |z - w| .$$

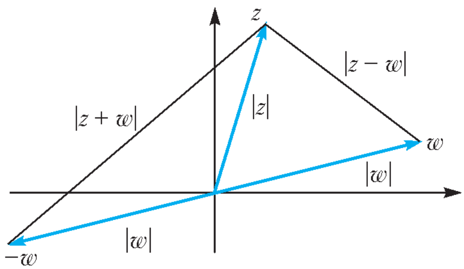


Рис. 4

Пример помощи в другую сторону – *равенство параллелограмма*: сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон. Это можно доказать алгебраически, записав в виде легко проверяемого тождества (рис.5):

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2 .$$

Геометрически равенство параллелограмма выводится из теоремы косинусов, которую, кстати, тоже можно доказать, используя комплексные числа (см., например, [2, с.14]; список литературы дан в предыдущем номере). Другое ее важное доказательство опирается на *скалярное произведение*:

$$AC^2 = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) =$$
$$= \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}\right) + 2\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}\right) =$$
$$= AB^2 + BC^2 - 2\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\right) =$$
$$= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\angle B.$$

В координатах скалярное произведение векторов (x, y) и (u, v) выражается по формуле $xu + yv$ (в ортонормированном базисе!). На комплексном языке, $z = x + yi$, $w = u + iv$, эту формулу можно записать так:

$$(z, w) = xu + yv = \operatorname{Re}(z\bar{w}),$$

в частности,

$$z \perp w \Leftrightarrow (z, w) = 0 \Leftrightarrow z\bar{w} \in i\mathbb{R}. \qquad (19)$$

Все пункты следующей задачи можно решить чисто геометрически, без выкладок.

21. Изобразите на комплексной плоскости множества точек z, удовлетворяющих условиям:

а) $|z + 2| = |z - i|$; б) $|z - i - 1| = \sqrt{2}$;

в) $|z - i| + |z + i| = 2$; г) $z^2 \in \mathbb{R}$; д) $z^3 \in i\mathbb{R}$.

В пункте а) можно, конечно, возвести уравнение в квадрат, записать $z = x + yi$, сократить $x^2 + y^2$ и прийти к уравнению прямой. А вот устное геометрическое решение: точка z равноудалена от точек -2 и i, если и только если она лежит на серединном перпендикуляре к отрезку с концами -2, i.

22. Опишите геометрически расположение чисел $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ с условиями $z_1 + \ldots + z_k = 0$, $|z_1| = \ldots = |z_k| \ne 0$ для а) $k = 3$; б) $k = 4$.

Вот несколько *аффинных* миниатюр в картинках – в них нет углов и неважно положение начала координат.

• Рисунок 6,*а* иллюстрирует «правило рычага», с помощью которого на рисунке 6,*б*

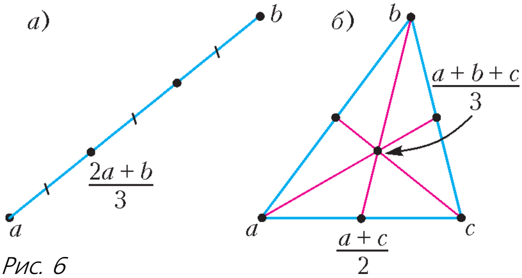


Рис. 6

найден центр масс треугольника – точка пересечения его медиан.

• На рисунке 7 для заданных $a,b,c \in \mathbb{C}$ изображено геометрическое место точек

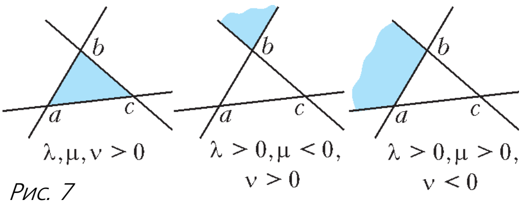


Рис. 7

$\lambda a + \mu b + \nu c$ в зависимости от знаков чисел $\lambda,\mu,\nu \in \mathbb{R}$, связанных равенством $\lambda + \mu + \nu = 1$.

«Хотелось бы больше примеров по геометрии, в которых польза от комплексных чисел более ощутима. Пока приведенные примеры можно решить векторами и координатами. Где же специфика комплексных чисел?» – может спросить читатель. Согласившись с этим резонным замечанием, перейдем от упражнений для разминки к содержательным теоремам и задачам, где комплексные числа уже по существу.

Одно из главных преимуществ комплексных чисел в том, что с их помощью удобно оперировать с углами *напрямую*, а не посредством теоремы косинусов или скалярного произведения, которые порой приводят к неоправданно громоздким вычислениям. Конкретно, углы возникают как аргументы комплексных чисел.

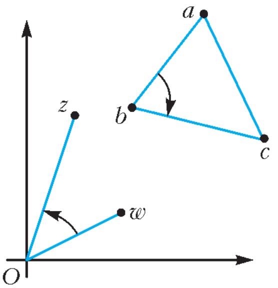


Рис. 8

• Ясно, что $\arg \frac{z}{w}$ для $z,w \neq 0$ – это величина ориентированного угла wOz (рис.8).

• Более общо, $\arg \frac{c-b}{a-b}$ для $a \neq b \neq c \neq a$ – это величина угла abc.

• Как следствие, различные точки a, b, c лежат на одной прямой в точности тогда, когда $\arg \frac{c-b}{a-b} \in \pi\mathbb{Z}$, т.е. когда *простое отношение трех точек* $\frac{c-b}{a-b}$ действительно.

• Другое следствие: различные точки a, b, c, d лежат на одной прямой или на одной окружности в точности тогда, когда их *двойное отношение*

$$[a,b,c,d] = \frac{c-a}{d-a} : \frac{c-b}{d-b}$$

действительно. (Последнее означает, что аргументы отношений $\frac{c-a}{d-a}$ и $\frac{c-b}{d-b}$ либо равны, либо отличаются на π (рис.9). В этом – главная идея. Проведите аккуратное рассуждение, не забыв об ориентации углов.)

С помощью двойного отношения легко доказывается следующая теорема (см. [2]).

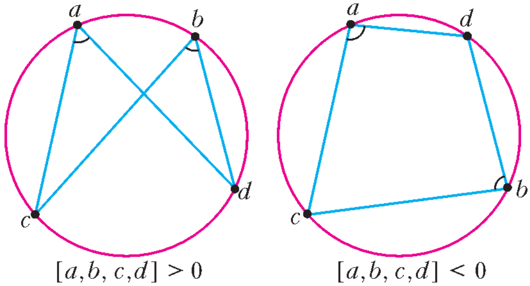


Рис. 9

23. Теорема Птолемея. *Произведение диагоналей четырехугольника не больше суммы произведений противоположных сторон, причем равенство достигается в точности для вписанных четырехугольников.*

24. Докажите формулы для точки z по рисункам 10,*а* и 10,*б*.

Задача 24 а помогает доказать следующую теорему.

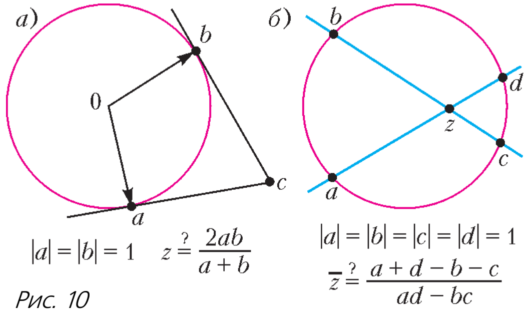


Рис. 10

25. Теорема Ньютона [2, с.14]. *Центр описанной около четырехугольника окружности и середины его диагоналей лежат на одной прямой.*

А на задаче 24 б и простом отношении трех точек основано короткое комплексное доказательство следующей знаменитой теоремы проективной геометрии.

26. Теорема Паскаля. *Точки пересечения прямых, содержащих противоположные стороны вписанного шестиугольника, лежат на одной прямой.*

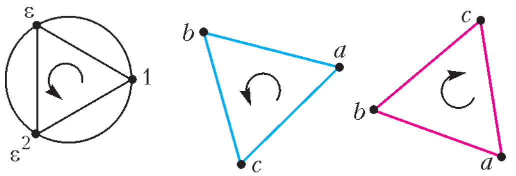
Вот что пишут авторы [4, с.24], где вы сможете найти эти и другие именитые теоремы (о прямых Эйлера и Гаусса): «Какое блистательное созвездие имен, какое великолепное собрание геометрических шедевров!» А ведь ключи к этим шедеврам умещаются на рисунках 8–10.

Еще одно важное преимущество комплексных чисел: с их помощью удобно записывать движения и, более общо, преобразования подобия, так часто встречающиеся в геометрических задачах. Соберем основные преобразования в *алгебро-геометрический словарик* (см. таблицу и рис.11):

27. Критерий правильного треугольника. *Пусть числа $a, b, c \in \mathbb{C}$ различны. Тогда*

$$\Delta abc \text{ правильный} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0, \\ a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon = 0. \end{array}\right. \quad (20)$$

Какой из двух случаев имеет место, зависит от направления обхода вершин Δabc и понятно из треугольника $\sqrt[3]{1}$ (рис.12).



$\sqrt[3]{1} = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2\}$ $\quad a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = 0$ $\quad a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon = 0$

Рис. 12

Доказательство. Треугольник abc правильный $\Leftrightarrow$ вектор $\overrightarrow{ba}$ получается из вектора $\overrightarrow{bc}$ поворотом вокруг точки b на угол $\pm\pi/3 \Leftrightarrow a - b = -\varepsilon^{\pm 2}(c - b)$ (так как $-\varepsilon^2 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$). Отсюда получаем критерий (20).

$z \mapsto z + a$	параллельный перенос на вектор a
$z \mapsto (\cos\varphi + i\sin\varphi)z$	поворот на угол φ вокруг нуля
$z \mapsto kz\,(0 \ne k \in \mathbb{R})$	центральная гомотетия с коэффициентом k
$z \mapsto \overline{z}$	симметрия относительно действительной оси

Наиболее ярко специфика комплексных чисел проявляется именно при записи поворотов. Проиллюстрируем это на нескольких классических фактах о правильном треугольнике. Обозначим $\varepsilon = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \in \sqrt[3]{1}$.

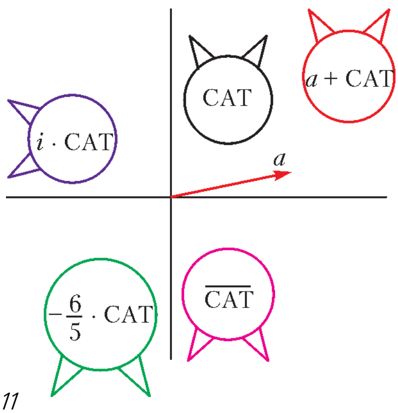


Рис. 11

28. Теорема Наполеона. *Если на сторонах треугольника построены правильные треугольники (все три – либо наружу, либо внутрь), то их центры являются вершинами правильного треугольника.*

Доказательство. Пусть правильные треугольники построены наружу (рис.13). Их третьи вершины находятся из (20), а центры – затем из рисунка 6,*б*. Остается проверить, что эти центры удовлетворяют критерию (20). Случай треугольников, построенных внутрь, аналогичен.

29. Теорема Помпею. *Пусть правильный треугольник ABC вписан в окружность, на меньшей дуге BC которой взята точка M (рис.14,а). Тогда MA = MB + MC.*

Пусть $A = 1$, $B = \varepsilon$, $C = \varepsilon^2 = \overline{\varepsilon}$. Точка M имеет вид $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$, где $\varphi \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$.

Требуется доказать, что $|z - 1| = |z - \varepsilon| + |z - \overline{\varepsilon}|$.

Обозначив $c = \cos\varphi$, $s = \sin\varphi$, преобразуем:

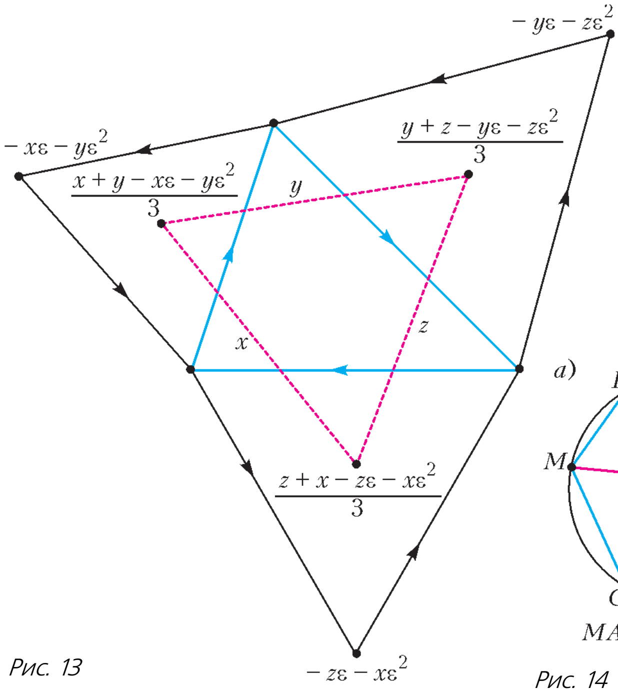


Рис. 13

30. Докажите *обобщенную теорему Помпею* (рис.14,*б*). Занумеруем вершины правильного $(2n+1)$-угольника так: $A_{-n}\ldots A_0\ldots A_n$ и выберем произвольную точку M на меньшей дуге $A_{-n}A_n$. Тогда сумма расстояний от M до вершин с четными номерами такая же, как и до вершин с нечетными номерами.

Геометрические доказательства теоремы Помпею и ее обобщения вы можете прочитать в статьях М.Горелова и Е.Бакаева в «Кванте» №1 за 2017 год (с.33 и 39).

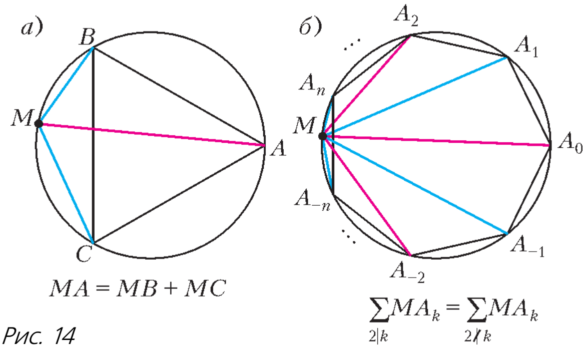


Рис. 14

$$\sqrt{2-2c} = \sqrt{2+c-\sqrt{3}s} + \sqrt{2+c-\sqrt{3}s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2-2c = 2(2+c) + 2\sqrt{(2+c)^2 - 3s^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4c^2+4c+1} = -2(2c+1) \Leftrightarrow 2c+1 \le 0,$$

что как раз выполняется при $\varphi \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$.

В заключение скажем, что применение комплексных чисел в задачах по геометрии – тема необъятная. Мы привели небольшую подборку рабочих инструментов и ярких фактов. Больше материала вы можете найти, например, в книге [3] и цитированной там литературе.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Задачи по физике – смысл условий

Л.АШКИНАЗИ

ПОДАВЛЯЮЩЕЕ БОЛЬШИНСТВО ШКОЛЬных задач по физике, в том числе задач ЕГЭ, подразумевают однозначную формулировку, четко определенные свойства объектов, как правило – один вариант решения (хотя не караются и альтернативные способы) и один ответ в виде формулы или (чаще) формулы и числа.

Однако бывают так называемые качественные задачи, в которых надо понять, какие процессы имеют значение в конкретной ситуации, иногда указать направление изменения той или иной величины или предсказать конечный результат. Есть сборники таких задач, например:

С.В.Коновалихин. Сборник качественных задач по физике,

А.В.Аганов, Р.К.Сафиуллин, А.И.Скворцов, Д.А.Таюрский. Физика вокруг нас.

Школьники, воспитанные однозначной школьной физикой, качественных задач побаиваются. Реальные задачи, которые решают физики, в большинстве случаев начинаются с размышления о том, какие процессы играют роль в данной ситуации. Либо проблемы с процессами и их взаимодействием возникают в ходе решения задачи. Поэтому некоторые из качественных задач похожи на реальные, но само название «качественные» ущербно – оно намекает, что серьезную вычислительную модель строить не надо.

Между тем, есть задачники, в которых собраны именно натуральные физические задачи (все эти книги можно найти в интернете):

Дж.Уокер. Физический фейерверк (см. также журнал «В мире науки» за 1983–1993 годы, раздел «Наука вокруг нас»),

Задачи П.Л.Капицы (наиболее полная подборка тут: http://vivovoco.astronet.ru/VV/PAPERS/KAPITZA/KAPQUEST.HTM),

Л.Г.Асламазов, И.Ш.Слободецкий. Задачи по физике и не только,

П.В.Маковецкий. Смотри в корень!

Э.В.Колотухин. Аттракцион природы и разума,

В.В.Кашкаров. Трамвай глазами физика,

А.П.Кузнецов, С.П.Кузнецов, Л.А.Мельников. Физические задачи для научных работников младшего возраста,

М.Е.Перельман. А почему это так?

Натуральные задачи изредка встречаются в обычных задачниках, немного чаще – в сборниках олимпиадных задач (http://turlom.olimpiada.ru/; http://olympiads.mccme.ru/turlom/2015/inf.html; http://konkurs2016.turlom.info/), а также в коллекции задач журнала «Квант» (http://kvant.mccme.ru/rub/7B.htm).

Вернемся, однако, к обычным школьным задачам. Поскольку в основании физических задач лежит жизненная ситуация, то при записи условий используется и формальный физический, и бытовой язык. И возникает вопрос: как перевести на язык уравнений эту бытовую часть? Ситуации бывают нескольких типов. Вот некоторые из них.

Фразы, разрешающие применить тот или иной закон, и что делать, если их нет

Любой физический закон соблюдается при некоторых условиях и с некоторой точностью, поскольку он либо установлен экспериментально, а точность эксперимента всегда ограничена, либо выведен из каких-то других законов, которые установлены экспериментально. Иногда эти ограничения в учебниках оговаривают, точность же оговаривают существенно реже (и это странно, потому что ограничения и точность – вещи связанные). Приводя, например, закон гравитации, можно потребовать точечности масс, но таких масс не бывает; лучше указать, что при таких-то отношениях размера масс к расстоянию между ними точность не хуже такой-то, причем именно в данном случае. Проделать же эту процедуру с формулой для емкости плоского конденсатора существенно сложнее. При этом в задачах сами условия применения закона могут и не называться – вы все равно вынуждены эти условия принять, потому что иначе нет закона и нет решенной задачи.

Заметим, что возможно создание такой задачи, когда это неявное, но неизбежное условие используется внутри нее самой. Например, требование вычислить силу взаимодействия двух заряженных проводящих шаров известного диаметра вынуждает вас принять некоторое предположение, которое позволяет вам решить другую часть задачи – скажем, вычислить нагрев одного из шаров равномерным во все стороны тепловым излучением другого шара. (Но это, конечно, экзотика.)

Вот примеры, когда формулировка задачи разрешает применение закона:

- *точечные заряды* – закон Кулона, уравнение для напряженности и потенциала электрического поля,
- *точечная масса* – закон всемирного тяготения,
- *тонкий бесконечный прямолинейный проводник с током* – формула для индукции магнитного поля во всем пространстве,
- *идеальный газ* – уравнение состояния идеального газа, закон Дальтона,
- *абсолютно упругий, абсолютно неупругий удар* – законы сохранения,
- *идеальная тепловая машина* – формула для КПД цикла,

- *тонкая линза* – соответствующая формула и метод построения изображений.

Собственно говоря, любому физическому закону соответствуют условия его применимости, иногда они в школе оговариваются, иногда нет. А иногда оговорить их весьма трудно, потому что закон опирается на глубинные основы нашего мира (например, эквивалентность тяжелой и инертной масс). Многие физические законы мы применяем, не оговаривая условий, причем нахождение таких условий само вполне может стать задачей. Например: назвать четыре условия, при которых соблюдается закон Ома, или назвать два условия (кроме условий идеальности и не слишком низкой температуры), при которых выполняется уравнение состояния идеального газа.

Фразы, позволяющие не учитывать параметр, который мы могли бы учесть

Чаще всего это разрешение чем-то пренебречь. Вот примеры:

- *катится тележка* – сила трения равна нулю,
- *что-то скользит по гладкой поверхности* – сила трения равна нулю,
- *процесс быстрый* – без теплообмена с внешним миром,
- *калориметр* – процесс без теплообмена с внешним миром,
- *удар* – перемещение тел и работа внешних сил за время взаимодействия равны нулю,
- *блок без трения* – касательная сила для веревки равна нулю,
- *веревка, нить, трос* – нерастяжимые, невесомые, их поперечная жесткость равна нулю,
- *опора* – деформация равна нулю,
- *сопротивление проводов и катушек отсутствует* – учет только сопротивлений резисторов в схеме,
- *диэлектрик* – нет переноса заряда,
- *вольтметр* – ток через него равен нулю,
- *амперметр* – падение напряжения на нем равно нулю,
- *легкая* (например, оболочка воздушного шара) – масса равна нулю,
- *мягкая оболочка* (или оболочка с отверстием) – давления внутри и снаружи равны,
- *жесткая оболочка* – объем постоянен,
- *тонкий цилиндр, обруч* – момент инерции равен произведению массы на квадрат радиуса,
- *поршень без трения* – давления с разных сторон одинаковы,
- *перегородка или тонкая трубка* – их объем равен нулю.

Многочисленные примеры фраз этого типа приведены в статье М.Бондарова «В начале было слово...» (журнал «Квант», 2016, №5–6, с.53, таблица «скрытого смысла»). Анализ правомерности некоторых из этих предположений сам по себе является хорошей задачей – например, попробуйте определить, как направлена сила трения качения. Существуют ситуации, когда эти естественные в школе предположения нарушаются, но это оговаривается и является частью задачи: например, предлагается вольтметр и амперметр не считать идеальными или «тонкая перегородка» трактуется как равенство температур газа по ее стороны (отсутствие теплового сопротивления). Кстати, можно сформулировать много задач такого типа, когда описывается ситуация и спрашивается, нарушение какого обычного предположения могло это повлечь.

Это все ситуации, когда параметр мы могли бы и учесть. Но есть ситуации, когда дело обстоит иначе.

Фразы, позволяющие не учитывать параметр, который мы учесть не можем, разве что ценой сильного упрощения модели

Вот некоторые примеры:

- *выключатель замыкается, размыкается* – время коммутации ноль, переход энергии в тепло и излучение отсутствует, ток через разомкнутый выключатель и падение напряжения на замкнутом равны нулю,
- *сопротивление движению со стороны воздуха отсутствует* – соответствующая сила равна нулю; но встречается задача оценки этой силы или предлагается считать эту силу постоянной (т.е. как при сухом трении, да еще в простейшей его модели),
- *...падает с большой высоты* – скорость стабилизировалась,
- *трение* – коэффициент трения не зависит от скорости и площади опоры (т.е. от давления),

- *фото-* и *термоэмиссия* – не учитывается энергия, которую электроны проводимости имеют в металле,
- *провода* – не учитывается их емкость и индуктивность.

И вообще, любая величина, указанная как параметр – например давление атмосферы, плотность жидкости, гравитация и так далее, считается постоянной, в частности не зависящей от координат и времени, если не указано иное. Отсюда могут проистекать следствия, которые можно использовать внутри этой же задачи – к примеру, если сказано, что тело движется с такой-то скоростью, то это значит, что либо коэффициент трения, либо давление на опору равны нулю, что может иметь свое следствие и позволить решить другую часть задачи. (Но это, конечно, экзотика.)

Обратите внимание, что величина, которая в задачах одного типа традиционно принимается постоянной или пренебрежимо малой, в задачах другого типа может считаться переменной и существенной для решения. Так, для учета архимедовой силы давление считают изменяющимся по высоте, а при решении задач на гидравлику и сообщающиеся сосуды – обычно нет. Хотя как раз в данном случае учет вполне возможен.

Иногда об учете или неучете эффекта догадаться трудно. Скажем, в известной задаче о притяжении двух одноименно заряженных металлических шаров индукция учитывается, а в задаче о полете заряженной частицы в конденсаторе или в металлической трубе переменного сечения индукцией радостно пренебрегают. Формально – потому, что учитывать ее непонятно как, а на самом деле – потому, что эффект действительно мал.

Но это все цветочки, а теперь упомянем ягодки (до варенья в этой статье дело не дойдет).

Многие обычные, принятые и в школе, и в серьезных работах физические модели имеют ограничения, причем принципиальные

Массовое пренебрежение этими ограничениями означает, что в большинстве рассматриваемых случаев на точность решения практически значимых или важных для развития теории задач оное пренебрежение не влияет. Однако всегда возможно, что через какое-то время возникнет проблема, при рассмотрении которой эти общепринятые ограничения будут мешать. Возможна и такая ситуация, когда при рассмотрении задач одного типа предположения не мешают или мешают редко, а в другой области они недопустимы. Вот некоторые примеры:

- *размер электрона* – его вроде бы никогда не учитывают, но понятно, что нулевым он быть не может (кстати, почему?),
- *дискретность заряда* – в электротехнике ее не учитывают, хотя среди вопросов, сформулированных выше, есть с этим связанный; в радиоэлектронике же дискретность заряда очень часто важна,
- *дискретность газа* (то, что он состоит из отдельных молекул) – это на закон Менделеева–Клапейрона не влияет… или влияет?
- *замена распределенных сил сосредоточенными* – в школе она общепринята, в сопромате и строительной механике недопустима; однако и на школьном уровне есть простые задачи, которые нельзя решить, не сообразив, что гравитация, трение, реакция опоры – это силы распределенные,
- *утверждение, что электрическое поле не проникает в металл, а заряд сосредоточен на поверхности* – приводит к некорректностям, в частности при попытке оценить действие поля на проводник,
- *многие процессы теоретически идут бесконечно* (например, торможение тела в жидкости) – а интуиция шепчет, что это как-то странно,
- *нормальное распределение, например молекул по скоростям, теоретически простирается до бесконечности* – так ли это?

* * *

Резюме будет коротким и внезапным: если вы хотите изучать физику, а потом и работать в этой области, то скучать вам не придется.

Счетчики и расстояния в графах

П.КОЖЕВНИКОВ

В этой статье мы обсудим некоторые подходы к комбинаторным задачам об оценке количества операций. Вначале рассмотрим следующие задачи.

Задача 1. *На плоскости перегородками (единичными отрезками) выложили клетчатый квадрат 5×5 (рис.1). Какое минимальное число перегородок нужно удалить, чтобы из каждого квадратика можно было выйти наружу (не пересекая перегородку)?*

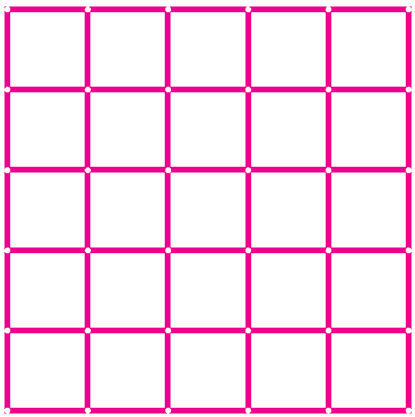


Рис. 1

Задача 2. *Дана полоска 1×20, в которой каждая клетка либо белая, либо черная. За одну операцию можно перекрасить клетки в любом прямоугольнике (рис.2). За какое наименьшее число операций можно наверняка сделать всю полоску белой?*

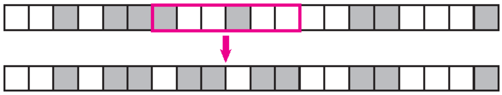


Рис. 2

Задача 3. *Десять карточек с числами от 1 до 10 положили в ряд в некотором порядке. За один ход можно поменять местами две соседние карточки (рис.3). За какое наименьшее число ходов можно всегда получить ряд из карточек, идущих слева направо в порядке возрастания?*

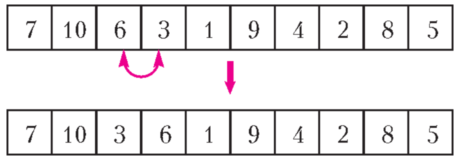


Рис. 3

Условия задач совсем разные, но имеют единую структуру: определяется некоторая операция и ставится вопрос о наименьшем числе таких операций, которое требуется произвести, чтобы из одного положения попасть в другое. Чтобы найти подходы к решению задач, вначале обсудим более простую задачу с похожей логической структурой.

Простая задача. *Фишка стоит в точке $(7,7)$ координатной плоскости (рис.4). За один ход ее можно передвинуть на 1 вправо, влево, вверх или вниз. За какое наименьшее число ходов фишка может попасть в начало координат?*

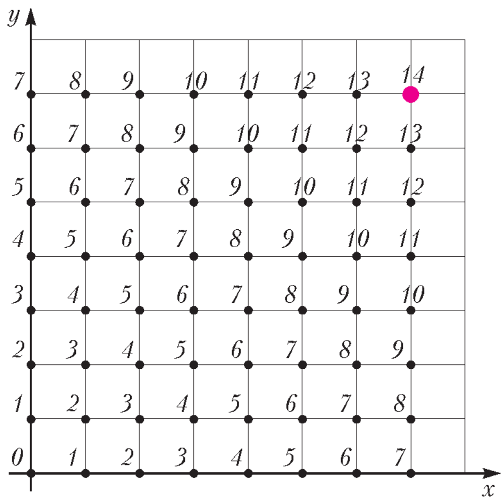


Рис. 4

Конечно, за 14: начальная клетка отстоит на 7 горизонталей и на 7 вертикалей от цели, поэтому придется сделать не менее 7 горизонтальных ходов и не менее 7 вертикальных (и конечно, есть много способов дойти до цели ровно за 14 ходов).

Можно рассуждать и иначе. В каждый узел первого квадранта целочисленой решетки запишем сумму координат, тогда записанные числа представляют собой своеобразный *счетчик*: когда фишка находится в клетке с числом k, ей остается k ходов до цели. Счетчик можно было бы установить и без привлечения координат, просто двигаясь от цели «с конца»: ставим число 1 в узлы, из которых можно дойти до цели за один ход (I «этаж»), число 2 – в узлы, из которых можно дойти до некоторого узла с I этажа за один ход (II «этаж»), и т.д.

Упражнение 1. Девять фишек изначально заполняют правый верхний угол 3×3 шахматной доски. За один ход можно передвинуть одну из фишек на соседнюю свободную клетку. За какое наименьшее число ходов фишки может перевести в левый нижний угол 3×3 ?

Но вернемся к задачам 1–3. Вот если бы нам так же удалось подобрать подходящий счетчик, изменяющийся на 1 (или хотя бы каким-то контролируемым образом) при выполнении операции... Тогда бы мы понимали, насколько далеко (по количеству ходов) мы находимся от цели, и, возможно, смогли бы закончить решение так же коротко, как в Простой задаче. Давайте попробуем!

Обсуждение и решение задачи 1. Будем считать плоскость «океаном», в котором перегородки отделили несколько разрозненных «водоемов». Обратим внимание на то, что вначале у нас много отдельных водоемов, а в конце по условию должен остаться один (из любой клетки можно проплыть в «океан»). При этом за одну операцию два водоема, примыкающие к перегородке, сливаются в один. Значит, количество водоемов за одну операцию уменьшается на 1? Это почти правда: иногда две клетки, примыкающие к перегородке, – это клетки одного и того же водоема (рис.5). В этом случае после операции удаления перегородки количество водоемов не изменится. В любом случае за одну

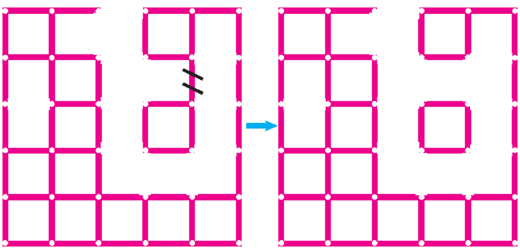


Рис. 5

операцию количество водоемов уменьшается не более чем на 1. Вначале у нас 26 водоемов (включая внешний «океан»), в конце должен остаться один, поэтому количество операций не менее $26 - 1 = 25$.

Предлагаем читателю привести пример удаления ровно 25 перегородок (как мы теперь понимаем, в оптимальном примере достаточно только избегать удаления перегородок между двумя клетками одного и того же водоема).

Таким образом, подходящий счетчик (минимальное количество ходов до цели) в задаче 1 это $n - 1$, где n – количество водоемов.

Отметим, что переформулировка этой задачи обсуждалась в «Кванте» и раньше – например, в статье «Свяжитесь с графом» («Квант» № 4 за 2014 г.). По сути во многих задачах упомянутой статьи появляются счетчики «количество областей (или кусков, или компонент связности в графе)».

Обсуждение и решение задачи 2. В конечном итоге все клетки полоски должны стать белыми, поэтому вначале может показаться, что искомый счетчик должен быть связан с количеством черных клеток. Но даже если черных клеток много, иногда можно обойтись всего одной операцией перекраски (например, для полностью черной полоски). Дело в том, что с блоком последовательных черных клеток «бороться» столь же легко, как и с одной черной клеткой. А вот устранить большое число переходов между черными и белыми блоками не так просто. Ключ к решению надо искать, рассматривая эти блоки или переходы между черными и белыми блоками.

Возьмем счетчик «количество черных блоков». Рассмотрев всевозможные случаи выполнения операции перекрашивания (когда границы перекрашиваемого прямоугольника находятся внутри черного или белого блока или же попадают между блоков; некоторые случаи показаны на рисунке 6), убеждаемся, что количество черных блоков либо не изменяется, либо изменяется на 1. Конечное количество черных блоков должно равняться 0, изначальное количество черных блоков может равняться 10 – как в случае «зебры» на рисунке 7. Значит, если начальная раскраска – «зебра», то нам потребуется выполнить не менее 10 операций.

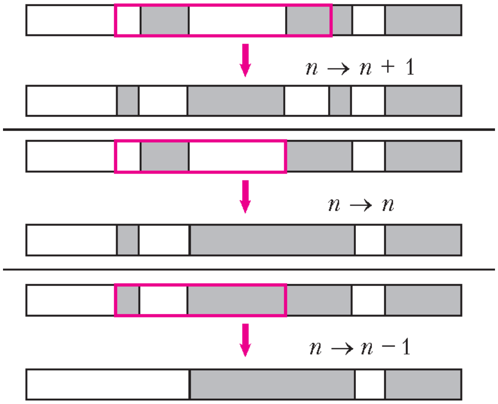


Рис. 6

Рис. 7

С другой стороны, ясно, что в любой ситуации начальное количество черных блоков не более 10. И мы можем просто каждой очередной операцией брать черный блок и превращать его в белый. Не более чем за 10 операций мы получим белую полоску.

Упражнение 2. Придумайте другое рассуждение, решающее задачу, используя «перегородки» между черными и белыми блоками.

Обсуждение и решение задачи 3. Интуитивно ясно, что самая «неудобная» ситуация – когда карточки изначально лежат в порядке убывания: 10, 9, 8, …, 1. Можно вначале проследить за перемещением каждой карточки. Для того чтобы прийти к порядку возрастания 1, 2, …, 10, карточке 1 (так же, как и карточке 10) надо переместиться на 9 позиций влево (соответственно, вправо), карточкам 2 и 9 – на 7 позиций, карточкам 3 и 8 – на 5, карточкам 4 и 7 – на 3, карточкам 5 и 6 – на 1 позицию. Итого суммарное перемещение должно равняться $2(9 + 7 + 5 + 3 + 1) = 50$. За один ход две карточки перемещаются на 1, поэтому необходимо сделать хотя бы $50/2 = 25$ ходов. Однако, чтобы каждая карточка переместилась именно на указанное число единиц, не допускаются перемещения «в неправильную» сторону. Например, чтобы добраться до самой левой позиции за 9 ходов, карточка 1 должна двигаться только влево. То же должно быть верно и для карточки 2: чтобы добраться до второго слева места за 7 ходов, карточка 2 должна двигаться только влево. Но одновременно эти два условия для карточек 1 и 2 невыполнимы. Действительно, в начальной ситуации карточка 1 правее карточки 2, а в конечной ситуации – левее. Значит, на каком-то ходе нам нужно будет поменять местами карточки 1 и 2, при этом карточка 2 переместится на 1 вправо, т.е. сделает перемещение в «неправильную» сторону. Получается, что попытка ввести счетчик «суммарное количество перемещений» приводит к некоторой оценке на число ходов, но эта оценка неточна.

Но, разбираясь в ситуации, мы поняли, что обязательно сделаем ход, состоящий в обмене конкретной пары карточек 1 и 2. Аналогично, для любой пары карточек $m < n$, для которой в начальной ситуации карточка n левее карточки m (такие изначально «неправильные» пары карточек называют еще «беспорядками»), когда-то должен был произойти ход, состоящий в обмене карточек m и n. Значит, чтобы из позиции 10, 9, 8, …, 1 прийти к позиции 1, 2, …, 10, должен произойти обмен каждой конкретной пары карточек. Таким образом, необходимое количество ходов не меньше количества пар, т.е. не меньше чем $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$.

С другой стороны, при любой начальной ситуации 45 ходов хватит. Например, сначала карточку 1 обменяем со всеми карточками, которые левее нее, в результате чего она окажется на самом левом месте. Затем «двигаем» карточку 2 влево и переведем на второе место слева и т.д. Каждый раз мы уменьшаем число беспорядков на 1, значит, сделаем не более 45 ходов до конечной позиции 1, 2, …, 10. (Конечно, здесь можно оценить число ходов и без всяких беспорядков: карточка 1 сделала не более 9 ходов, после этого карточка 2 – еще не более 8 ходов и т.д., наконец, карточка 9 сделала не более одного хода, итого не более $9 + 8 + \ldots + 1 = 45$ ходов.)

Задача 3 решена. Здесь помог счетчик «количество беспорядков». Этот счетчик уже «точный»: за один ход он изменяется (увеличивается или уменьшается) ровно на 1.

Упражнение 3. Изначально 10 карточек с числами от 1 до 10 положили в ряд в порядке 2, 4, 6, 8, 10, 1, 3, 5, 7, 9. За один ход можно поменять местами две соседние карточки (как в задаче 3).

а) За какое наименьшее число ходов можно получить ряд из карточек в порядке возрастания?

б) Можно ли это сделать ровно за 100 ходов?

Разберем еще пару красивых задач.

Задача 4 (М1241, переформулировка). *Имеется 2017 ящиков, содержащих 1, 2, 3,… …, 2017 камней соответственно. За один шаг разрешено выбросить из любого множества ящиков по одинаковому числу камней. За какое наименьшее число шагов можно выбросить все камни?*

Обсуждение и решение задачи 4. Вначале может показаться, что препятствие к быстрому выбрасыванию всех камней – то, что камней много. С другой стороны, как бы много камней ни было, если они будут распределены поровну между ящиками, то нам хватит и одного шага.

Значит, будем следить не за количеством камней, а за «разнообразием» распределения. Ящики с одинаковым количеством камней объявим ящиками одного типа и под *разнообразием* будем понимать количество различных типов (пустые ящики составляют отдельный тип). Изначально разнообразие равно 2017 – это довольно много. Рассмотрим выполнение шага. Пусть до этого шага разнообразие равнялось d. Все ящики делятся на два множества – те, из которых не брали камни на этом шаге, и те, из которых камни брали. Если d_1 и d_2 – разнообразия отдельно для первого и второго множества ящиков, то, очевидно, $d_1 + d_2 \geq d$. После того как из второго множества ящиков взяли по одинаковому количеству камней, разнообразие в этом множестве ящиков не изменилось. Значит, после выполнения шага разнообразие стало точно не меньше минимального из чисел d_1, d_2, следовательно, не меньше чем $d/2$. После первого шага разнообразие не меньше $\lceil 2017/2 \rceil = 1009$, после второго шага не меньше $\lceil 1009/2 \rceil = 505$, далее получаем последовательность 253, 127, 64, 32, 16, 8, 4, 2. Значит, после 10-го шага разнообразие будет хотя бы 2, следовательно, не все ящики пусты.

С другой стороны, за 11 шагов опустошить все ящики уже можно.

Упражнение 4. а) Покажите, как в задаче 4 опустошить все ящики за 11 шагов.

б) Покажите, как это сделать с дополнительным условием: на первом шаге нельзя выбрасывать в сумме больше 2000 камней.

Формально говоря, счетчик, который помог в опустошении ящиков, равен $\lceil \log_2 d \rceil$, где d – это разнообразие.

Задача 5. *На полке стоит 10-томное собрание сочинений в некотором порядке (тома пронумерованы от 1 до 10). За один ход можно поменять местами любые две книги. За какое наименьшее количество ходов все тома можно с гарантией расположить в порядке возрастания номеров?*

Обсуждение и первое решение задачи 5. Условие похоже на задачу 3, но теперь разрешено обменивать не только соседей, и ответ здесь будет гораздо меньше: 9 ходов.

Начнем с доказательства того, что 9 ходов всегда достаточно. Первым ходом ставим на место 1-й том (если он уже не на месте), вторым ходом – 2-й том и т.д., девятым ходом – 9-й том, при этом 10-й том автоматически окажется на своем месте.

Заметим, что один ход ставит на свое место не более двух томов. Значит, если в начальной ситуации ни один том не стоит на своем месте (а такое вполне возможно), то для того чтобы «навести порядок», нужно не менее $\lceil 9/2 \rceil = 5$ ходов – оценка получена, но не точная… Улучшить счетчик поможет такое наблюдение: за один ход ровно одна книга сдвигается направо (и одна – налево). Значит, если изначально у нас достаточно много книг, которые находятся левее своего конечного положения, мы не сможем быстро прийти к конечной ситуации.

Сформулируем мысль более точно.

Пронумеруем места томов от 1 до 10 слева направо. Назовем том *неудобным*, если его номер больше номера места, на котором он стоит. Пример показан на рисунке 8 (номера

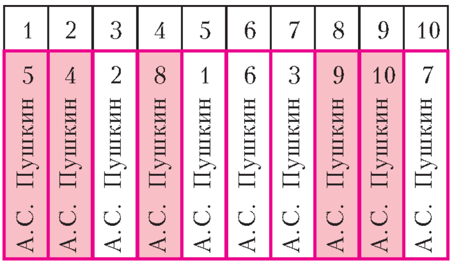


Рис. 8

мест написаны над томами, неудобные тома выделены розовым). Посмотрим на один ход (одну операцию обмена). Если том, который переместился налево, был неудобным, то он таковым и остался. Значит, поменять статус с неудобного на удобный мог только том, который переместился вправо. Тем самым счетчик «количество неудобных томов» не может уменьшиться более чем на 1 за один ход. Для конкретной начальной расстановки 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1 все тома, кроме тома 1, неудобные, а в конечной ситуации нет неудобных томов. Значит, из позиции 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 1 нельзя прийти к позиции 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 менее чем за 10 − 1 = 9 ходов. Задача решена.

Хотя решение и получено, мы увидим, что для некоторых конкретных расстановок томов счетчик «количество неудобных томов» все же не даст точной оценки. Поэтому приведем схему еще одного решения с более универсальным счетчиком.

Второе решение задачи 5. Проставив номера мест над номерами томов, получим таблицу 2×10 (рис.9). Сопоставим этой

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7 А.С. Пушкин	1 А.С. Пушкин	3 А.С. Пушкин	2 А.С. Пушкин	8 А.С. Пушкин	5 А.С. Пушкин	4 А.С. Пушкин	9 А.С. Пушкин	10 А.С. Пушкин	6 А.С. Пушкин

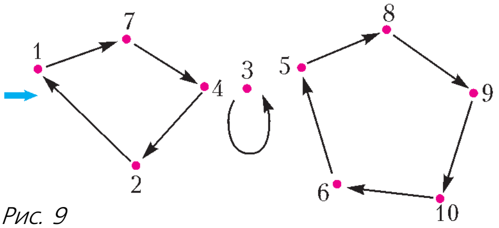


Рис. 9

таблице диаграмму со стрелками (ориентированный граф) с десятью вершинами, занумерованными числами от 1 до 10, по следующему правилу: если на i-м месте стоит том номер j, то проведем стрелку из вершины i в вершину j (если $i = j$, то получится стрелка-петля). Из каждой вершины выходит ровно одна стрелка и в каждую вершину входит ровно одна стрелка; значит, наша диаграмма распадается на ориентированные циклы (докажите!). Посмотрим, что произойдет с нашей диаграммой при обмене двух томов местами: некоторые две стрелки поменяются адресатами (т.е. некоторая пара стрелок $a \to c$ и $b \to d$ заменяется на пару $a \to d$ и $b \to c$). Нетрудно проверить (сделайте это), что если две стрелки, которые мы заменяем, из одного цикла, то этот цикл распадется на два цикла. Если же эти стрелки из разных циклов, то эти циклы, наоборот, «сольются» в один цикл. В любом случае за один ход количество циклов изменяется ровно на 1. Для конечной позиции 1, 2, …, 10 соответствующая диаграмма со стрелками представляет собов 10 циклов-петель. Поэтому если в начальной позиции диаграмма состоит из k циклов, то необходимое количество ходов не меньше $10 - k$. При этом оценка $10 - k$ действительно достигается: мы знаем, что достаточно на каждом ходе в диаграмме просто менять две стрелки из одного цикла (пока не получим 10 петель). В итоге наш универсальный счетчик равен «10 минус количество циклов».

Упражнения

5. На полке стоит 10-томное собрание сочинений в порядке 7, 1, 3, 2, 8, 5, 4, 9, 10, 6 (как на рисунке 9). За один ход разрешено поменять местами любые две книги (как в задаче 5). За какое наименьшее количество ходов все книги можно с гарантией расположить в порядке возрастания номеров томов? Какую оценку можно получить с помощью «неудобных томов» из первого решения (или аналогичных «правонеудобных томов»)?

6. На k книжных полках стоят n книг (на каждой полке хотя бы одна книга). На каждой полке первая книга переставлена в конец. За одну операцию разрешается менять местами любые две книги (возможно, с разных полок). За какое наименьшее число операций можно выстроить все книги в начальном порядке?

Посмотрим еще раз на разобранные задачи. В Простой задаче все было весьма наглядно. Всевозможные положения (позиции) фишки – узлы решетки, а возможные ходы – единичные отрезки, соединяющие соседние узлы. Таким образом, *граф позиций* (и возможных ходов) просто уже изображен на целочисленной решетке. В каждой из разобранных задач мы тоже можем рассмотреть свой граф позиций (всевозможных положений системы): условно изобразить множество всевозможных позиций в виде точек-вершин и соединить некоторые пары вершин ребрами, помечая тем самым возможность сделать ход, переводящий из одной позиции в другую. При этом для задач 1 и 4 ребра надо делать направленными, т.е. стрелками, а в остальных задачах можно не рисовать стрелки, так как ходы обратимы (иными словами, определение разрешенной операции таково, что обратная операция тоже является разрешенной).[1] С точки зрения графа позиций получается, что мы всякий раз решали одну и ту же задачу о нахождении *расстояния* (пути из минимального количества ребер или стрелок) между заданными вершинами-позициями. Но, думается, от этого общего взгляда не станет менее интересно находить счетчики, работающие для конкретной задачи.

В завершение предлагаем читателям решить следующие задачи.

Задачи для самостоятельного решения

1. За один ход фишку можно сдвигать в соседнюю клетку шахматной доски. За какое наименьшее количество ходов можно фишку из правого верхнего угла переместить в левый нижний угол, если запрещается ставить фишку в помеченные красным поля (рис.10)?

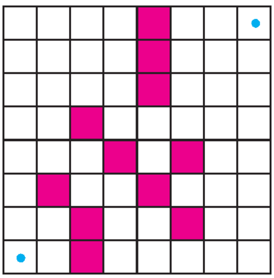


Рис. 10

2. Найдите наименьшее количество ходов, за которое шахматный конь из любой клетки доски наверняка может попасть: а) в левую нижнюю угловую клетку; б) в какую-нибудь угловую клетку.

3. На полке 100-томное собрание сочинений. За одну операцию любую книгу можно поменять местами с самой левой. За какое наименьшее количество операций все книги можно с гарантией расположить в порядке возрастания номеров томов?

4 (Московская олимпиада 2013 г.). На длинной скамейке сидели мальчик и девочка. К ним по одному подошли еще 20 детей, и каждый из них садился между какими-то двумя уже сидящими. Назовем девочку отважной, если она садилась между двумя соседними мальчиками, а мальчика – отважным, если он садился между двумя соседними девочками. Когда все сели, оказалось, что мальчики и девочки сидят на скамейке, чередуясь. Сколько из них были отважными?

[1] Граф из задач 3 и 5 появляется в теории групп: это граф Кэли для группы перестановок с заданной системой порождающих транспозиций.

5 (Всероссийская олимпиада 1993 г.). В колоде n карт. Часть из них лежит рубашками вверх, остальные – рубашками вниз. За один ход разрешается взять несколько карт сверху, перевернуть полученную стопку и снова положить ее сверху колоды. За какое наименьшее число ходов при любом начальном расположении карт можно добиться того, чтобы все карты лежали рубашками вниз?

6. В строку выписаны 20 знаков: 10 крестиков и 10 ноликов. За один ход можно поменять местами любые два соседних знака. За какое наименьшее количество ходов можно гарантированно добиться того, чтобы: а) 10 крестиков стояли слева; б) 10 крестиков стояли подряд и 10 ноликов стояли подряд; в) какие-то 10 стоящих подряд знаков оказались крестиками?

7 (Конкурс имени А.П.Савина, «Квант» №5–6 за 2016 г.). В ряд лежат карточки, занумерованные в некотором порядке числами 1, 2, … …, 15. За одну операцию можно поменять две карточки, лежащие рядом. За какое наименьшее число операций можно наверняка получить ряд из карточек, номера которых идут в порядке возрастания или в порядке убывания?

8. На доске изначально написано число 1. За одну операцию можно текущее число увеличить на 1 или умножить на 2. За какое наименьшее число операций можно получить число 2017?

9. Тролль решил распилить кубик Рубика: а) $8\times8\times8$; б*) $20\times20\times20$ на единичные кубики. Какое наименьшее количество распилов ему потребуется? (Распилы прямолинейные. Несколько частей можно складывать и распиливать одним распилом.)

10*. Правильный шестиугольник со стороной 10 разбит на ромбики со стороной 1. За одну операцию можно выделить в разбиении правильный шестиугольник со стороной 1 и переложить три ромбика внутри него. За какое наименьшее число операций из любого разбиения можно получить любое другое?

11* (M1285, переформулировка). В колоду сложены 52 различные карты. Разрешается переложить любое число рядом лежащих карт (не меняя порядок их следования и не переворачивая) в другое место колоды. Требуется несколькими такими операциями переложить все карты в обратном порядке. Какое наименьшее количество операций потребуется?

12*. Правильный треугольник со стороной 9 разрезан на 81 одинаковых правильных треугольничков со стороной 1. Изначально некоторые k из треугольничков покрашены. За один ход еще не покрашенный треугольничек можно покрасить, если к этому моменту покрашены не менее двух соседних с ним по стороне треугольничков. При каком наименьшем k через несколько ходов могло оказаться, что все треугольнички покрашены?

Заочная школа СУНЦ НГУ

В новосибирском Академгородке в составе Специализированного учебно-научного центра Новосибирского государственного университета (СУНЦ НГУ) уже более 50 лет работает Заочная физико-математическая школа (ЗШ) для учащихся 5 – 11 классов общеобразовательных школ. Учащиеся ЗШ, успешно выполнившие все задания, по окончании одиннадцатого класса получают удостоверение выпускников Заочной школы СУНЦ НГУ.

Преподаватели общеобразовательных учреждений могут работать по программам ЗШ в форме факультативных занятий с группой учащихся.

Ежегодно лучшие ученики 8–10 классов Заочной школы приглашаются в Летнюю школу, которая проводится в новосибирском Академгородке с 1 по 23 августа, для участия в конкурсе в СУНЦ НГУ.

В ЗШ СУНЦ НГУ принимаются все желающие, без вступительных экзаменов. Прием в школу ведется круглогодично. Чтобы стать учеником ЗШ, необходимо прислать заявление, указав класс и отделения, на которых Вы хотите учиться, свои фамилию, имя и отчество (печатными буквами), свой подробный адрес с индексом и выполненное первое задание. Задание выполняется в обычной ученической тетради и высылается простой или заказной бандеролью. Необходимо присылать решенное задание того класса, в котором Вы будете учиться в Заочной школе.

Можно присылать работы и по электронной почте. Требования к оформлению работ в электронном виде, необходимые документы и подробную информацию о ЗШ можно найти на сайте заочной школы http://zfmsh.nsu.ru

Наш адрес: 630090 Новосибирск, ул.Пирогова, 11, Заочная школа СУНЦ НГУ

Телефон/факс: (383) 363-40-66

E-mail: zfmsh@yandex.ru

Первые задания на 2017/18 учебный год

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

МАТЕМАТИКА

5 класс

1. Фигуру, составленную из шести равных квадратов (рис. 1), разделите на четыре одинаковые фигуры.

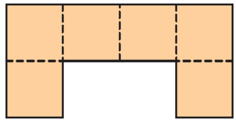


Рис. 1

2. Автомобиль от пункта A до пункта $Б$ с некоторой постоянной скоростью едет 25 мин. Если бы он двигался со скоростью на 3 км/ч больше, то весь путь проехал бы за 24 мин. Найдите расстояние от пункта A до пункта $Б$.

3. Найдите количество трехзначных натуральных чисел, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, в записи которых не встречается цифра 9.

4. Одну из сторон квадрата увеличили на 3 см, другую уменьшили на 2 см и получили прямоугольник, площадь которого на 30 см^2 больше площади квадрата. Найдите сторону этого квадрата.

5. Найдите сумму $2017 - 2015 + 2013 - 2011 + \ldots + 5 - 3 + 1$.

6. Лист бумаги разрезали на три части. Затем некоторые из полученных частей также разрезали на три части каждую и так проделали несколько раз. Может ли при подсчете количества всех частей получиться число 2018 и почему?

6 класс

1. В выражении $2 : 3 : 4 : 5$ расставьте скобки так, чтобы получилось наибольшее число.

2. Алеша проехал первую половину некоторого пути на велосипеде со скоростью 12 км/ч, а вторую прошел пешком со скоростью 4 км/ч. Боря весь этот путь бежал со скоростью 7 км/ч. Кто из мальчиков затратил на весь путь больше времени?

3. Найдите различные натуральные числа m и n такие, что $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{7}$.

4. Найдите сумму $2017 - 2014 + 2011 - 2008 + \ldots + 7 - 4 + 1$.

5. Найдите количество трехзначных номеров, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, у которых все цифры различны и одна из них не равна 5.

6. Фигуру, составленную из трех равных квадратов (рис.2), разделите на восемь одинаковых фигур.

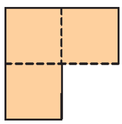


Рис. 2

7 класс

1. Для новогодних подарков закупили 42 шоколадки трех видов: по 50 рублей, по 60 рублей и по 70 рублей, затратив на них 2500 рублей. Найдите, каких шоколадок, первого или третьего вида, было закуплено больше и на сколько.

2. Найдите, чему равен наименьший периметр прямоугольника, который можно составить из 300 маленьких прямоугольников размером 1×2 см.

3. Найдите различные натуральные числа m и n такие, что $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{13}$.

4. Найдите количество трехзначных номеров, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, у которых сумма первой и третьей цифр равна 11.

5. Найдите семь последовательных натуральных чисел, сумма которых равна сумме некоторых четырех последовательных натуральных чисел.

6. Лист бумаги разрезали на четыре части. Затем некоторые из полученных частей также разрезали на четыре части каждую и так проделали несколько раз. Может ли при подсчете количества всех частей получиться число 2018 и почему?

8 класс

1. Цену товара увеличили на 28%. Найдите, сколько процентов составляет повышение цены товара от его новой цены.

2. Представьте число $\sqrt{76-42\sqrt{3}}$ в виде $a+b\sqrt{3}$, где a и b – целые числа.

3. В выражение $\frac{3n+7}{3n-7}$ вместо n подставляются натуральные числа. Найдите, при каком n полученное значение будет наименьшим.

4. В прямоугольнике $ABCD$ точки M и N – середины сторон AB и CD соответственно. Через точку M проводится прямая, пересекающая диагональ AC в точке P и луч CB в точке Q. Докажите, что $\angle MNP=\angle MNQ$.

5. Найдите сумму $2017-2010+2003-1996+\ldots+15-8+1$.

6. Найдите девять последовательных натуральных чисел, сумма которых равна сумме некоторых семи последовательных натуральных чисел.

9 класс

1. Найдите, при каком наименьшем значении a уравнение

$$|x-1|+|x-2|+|x-4|+|x-7|=a$$

имеет решения.

2. По дорожке стадиона длиной 400 м из одной точки одновременно в одном направлении выбегают три спортсмена со скоростями 12 км/ч, 15 км/ч и 17 км/ч. Найдите, через какое наименьшее время спортсмены поравняются.

3. Составьте уравнение четвертой степени с целыми коэффициентами, два корня которого – числа $2+\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}-2$.

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями $AD=9$ и $BC=7$ угол при вершине A прямой, а диагональ AC перпендикулярна стороне CD. Найдите отношение $AB:CD$.

5. Докажите, что число $200^4+201^4+200^2\cdot 201^2$ составное.

6. Докажите, что на клетчатой бумаге, составленной из квадратов со стороной 1, не существует двух вершин, расстояние между которыми равно $1000\sqrt{3}$.

10 класс

1. Рыбаки поймали не менее 30 и не более 100 рыб, из которых 48 % окуней. Пять рыб было отпущено в озеро. После этого оказалось, что среди оставшихся рыб 50 % составляют окуни. Найдите, сколько рыб поймали рыбаки.

2. Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющих соотношению

$$\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}.$$

3. Найдите все действительные корни уравнения

$$\sqrt{4x^2-12x+9}+\sqrt{4x^2+12x+9}=6.$$

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD=5$ и $BC=3$ диагональ AC перпендикулярна стороне CD. Найдите площадь этой трапеции.

5. Докажите, что если $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, то $\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{1}{a^3+b^3+c^3}$.

6. См. задачу 6 для 9 класса.

11 класс

1. См. задачу 1 для 10 класса.

2. Найдите количество трехзначных номеров, записываемых цифрами от 0 до 9 включительно, у которых ровно две цифры совпадают.

3. В четырехугольник $ABCD$ с неравными сторонами AB и CD вписана окружность, которая касается сторон AB, BC, CD и AD в точках K, L, M и N соответственно. Докажите, что прямые AC, KL и MN имеют общую точку.

4. Найдите, на какую наибольшую степень числа 3 делится произведение всех натуральных чисел от 1 до 2017 включительно.

5. Решите систему из двух уравнений

$$x + y^2 = 2 \text{ и } x^2 + y = 2 .$$

6. Для каждого значения a находят наибольшее значение функции

$$f(x) = (a+1)\sin 2x + (a-3)\cos 2x ,$$

равное $M(a)$. Найдите, чему равно наименьшее значение $M(a)$.

ФИЗИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ

ФИЗИКА

7 класс

1. Измерьте линейкой длину, ширину и высоту твердой коробки, например из-под обуви. Определите площадь каждой поверхности и объем коробки. Оцените ошибку каждого из проведенных измерений.

2. Измерьте длину своего шага. Пользуясь этой «мерой», определите длину пути, который вы проходите до школы или автобусной остановки. Оцените погрешность определения пути.

3. Автомобиль проходит первую половину пути со скоростью $v_1 = 70$ км/ч, а вторую – со скоростью $v_2 = 30$ км/ч. Определите среднюю скорость на всем пути.

4. Оперу слушают: зритель, сидящий в зале театра, и радиослушатель, находящийся возле приемника. Микрофон установлен в оркестре. Скорость звука $v = 340$ м/с. Скорость распространения радиоволн $c = 3 \cdot 10^8$ м/с. На каком расстоянии s_1 от оркестра должен сидеть зритель, чтобы слышать одновременно с радиослушателем, если последний находится на расстоянии $s_2 = 7500$ км от театра?

5. Кабина лифта опустилась с одиннадцатого этажа здания на пятый, а затем поднялась на восьмой этаж. Считая, что расстояния между этажами равны $L = 4$ м, определите путь и перемещение кабины.

8 класс

1. См. задачу 1 для 7 класса.

2. Катер, двигаясь по течению между двумя пунктами, затратил время t_1, а возвращаясь обратно, он затратил время t_2. Скорость катера относительно воды v. Найдите скорость течения.

3. Два поезда длиной $L_1 = 600$ м и $L_2 = 800$ м идут по параллельным путям в одном направлении со скоростями $v_1 = 54$ км/ч и $v_2 = 72$ м/ч соответственно. Сколько времени они проходят друг мимо друга?

4. Определите силу натяжения нити, связывающей два шарика объемом 10 см^3 каждый, если верхний шарик плавает, наполовину погрузившись в воду (рис.3). Нижний шарик в 3 раза тяжелее верхнего.

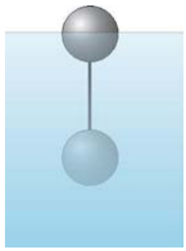


Рис. 3

5. Тело массой m, упавшее с высоты H, вновь поднялось на высоту h. Какое количество теплоты Q выделилось при ударе тела о поверхность?

9 класс

1. Когда в кастрюлю с кипящей водой бросили порцию замороженных пельменей, уровень воды в ней поднялся на высоту h_1. Через некоторое время пельмени сварились и всплыли – после этого уровень воды поднялся еще на h_2. Во сколько раз плотность замороженных пельменей больше плотности кипящей воды? Пельмени не впитывают воду.

2. Имеются две одинаковые линейки размером $a \times b \times c = 30 \times 2,5 \times 0,4$ см и грузик известной массы. Необходимо определить массу линейки. Для этого одна линейка устанавливается вертикально, а вторая выкладывается на первую так, чтобы линейки образовывали букву Т и горизонтальная линейка не падала (рис.4). Затем берут грузик известной массы m и находят минимальные расстояния x_1 и x_2 до краев линей-

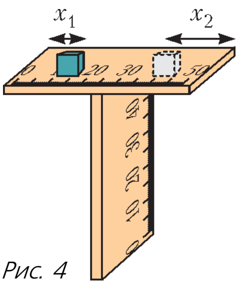


Рис. 4

ки, при которых он не переворачивает линейку. Определите массу линейки.

3. Экспериментатор в кабинете химии грел воду на газовой горелке. При этом он непрерывно контролировал температуру в колбе с водой. График температуры приведен на рисунке 5, а выборочные значения – в таблице. Между моментами времени t_2 и

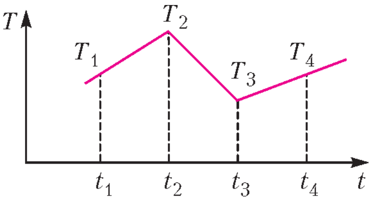


Рис. 5

t_1	100 с	T_1	60 °C
t_2	200 с	T_2	90 °C
t_3	300 с	T_3	55 °C
t_4	400 с	T_4	65 °C

t_3 экспериментатор добавил в колбу некоторое количество воды комнатной температуры. Определите температуру в комнате.

4. Из проволоки сделали два одинаковых правильных треугольника (рис.6). Сопротивление каждого из них между вершиной и

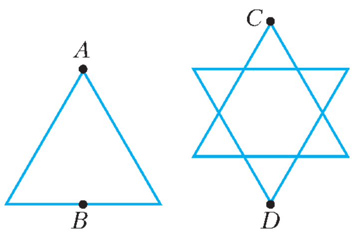


Рис. 6

серединой противоположной стороны, точки A и B, равно R_{AB}. Второй треугольник в зеркально симметричном положении наложили на первый и точки пересечения спаяли. Каким будет сопротивление между точками C и D полученной фигуры?

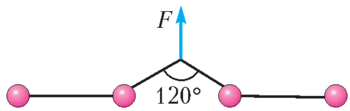
5. Две прямые дороги пересекаются под прямым углом. По каждой из них едет автомобиль. Скорость автомобилей одна и та же и равна v. Первый из них прошел место пересечения дорог в момент времени t_1, а второй – в момент времени t_2, $t_2 > t_1$. На каком минимальном расстоянии разошлись автомобили?

10 класс

1. Решите задачу 5 для 9 класса.

2. Ракета стартовала с земли вертикально. Двигатель ракеты создавал постоянную силу тяги вплоть до его выключения, которое произошло через время τ на высоте h. До какой максимальной высоты поднялась ракета?

3. Четыре одинаковые бусинки массой m каждая нанизали на нить. Крайние бусинки закрепили на концах нити, после чего бусинки и нить расположили на горизонтальном столе в виде показанной на рисунке 7 симметричной фигуры. Какие ускорения приобретут бусинки, если к середине нити прило-

Рис. 7


жить силу F, направленную вдоль оси симметрии фигуры? Трения нет.

4. Через блок переброшена нить, удерживающая два цилиндрических груза с одинаковыми массами, но разными площадями оснований S_1 и S_2 (рис.8). График показывает, как сила, которая удерживает блок в равновесии, зависит от высоты, на которой блок находится. Определите плотность жид-

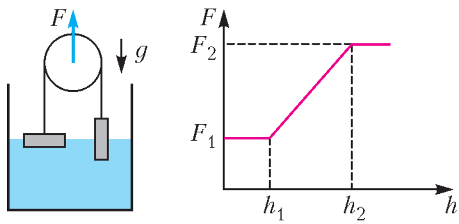


Рис. 8

кости. Оси цилиндров расположены вертикально.

5. Пуля массой m = 9 г застревает в мишени массой M = 1 кг, в результате чего мишень приобретает скорость отдачи u = = 7 м/с. На сколько после этого увеличится температура мишени? Удельная теплоемкость мишени $c = 1$ кДж/(кг · К). Считайте массу пули много меньшей массы мишени, $m \ll M$.

11 класс

1. Два человека в спортзале обмениваются мячами, посылаемыми на стену зала и упруго отскакивающими от этой стены. Один человек находится на расстоянии 2 м от стены, а другой – на расстоянии 6 м. С какой минимальной скоростью каждый из них должен посылать мяч, чтобы другой участник пасса мог его поймать?

2. На закрепленной двумя концами на одном уровне нити висит надетая на нее бусинка массой m. Определите действующую на бусинку горизонтальную силу, при которой бусинка примет изображенное на рисунке 9 положение. Трения нет.

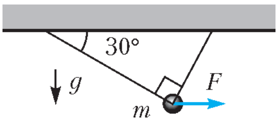


Рис. 9

3. Для подъема груза со дна моря водолазы наполнили эластичную камеру воздухом из баллона. Подъемной силы камеры оказалось недостаточно: ее хватило только на то, чтобы оторвать от дна груз, масса которого вместе с камерой равна m, что на Δm меньше, чем им было нужно. Водолазы все же выполнили свою задачу, потому что у них была веревка. Определите минимально необходимую длину веревки для решения этой задачи. Давление на дне p, плотность воды ρ, ускорение свободного падения g, массой веревки пренебречь.

4. Из закрепленной пружинной пушки стреляют, вставляя снаряд массой m = 50 г в ствол на разную глубину. Пушка имеет первоначально сжатую пружину и поршень, вставленный в цилиндр с упорами на концах (рис.10). В таблице приведены значения глубины h, на которую вставлялся снаряд, и расстояние x от пушки до точки его падения на горизонтальную поверхность. Определите жесткость пружины. Ствол пушки направлен под углом 45° к горизонту. Поршень движется с трением. Трением снаряда о воздух, массой поршня и размером пушки можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

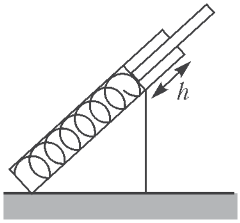


Рис. 10

h, см	1	2	3
x, м	1,5	4	8,5

5. На гладкий горизонтальный стол положили клин с углом при основании α и теннисный мячик (рис.11). Массы клина и мячика одинаковы. Клин толкнули, и он начал двигаться в направлении мячика. При каком угле α упруго отскочивший от клина мячик упадет впереди клина? Трения нет.

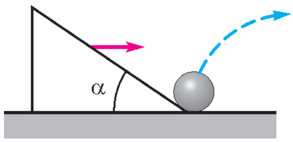


Рис. 11

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Национальный исследовательский университет «МИЭТ»

Интернет-олимпиады по физике

Национальный исследовательский университет «МИЭТ» на протяжении многих лет проводит для старшеклассников олимпиады по математике, физике и информатике, которые пользуются большой популярностью среди школьников Москвы и Московской области. Чтобы расширить круг участников, начиная с 2010 года олимпиады проводятся в заочной форме, используя интернет-технологии.

Олимпиада по физике проходит под названием «Поверь в себя!» Она не содержит сверхсложных задач, которые могут решать только специально подготовленные школьники. Почти все задачи допускают простые решения без громоздкой алгебры на основе знаний обычной школьной программы. Однако вместе с вполне стандартными задачами в заданиях олимпиады можно найти и новые, решения которых сразу не очевидны.

С 2015 года наряду с олимпиадой «Поверь в себя!» МИЭТ стал проводить по схожему регламенту еще одну олимпиаду для школьников – «Ритм МИЭТ».

Ниже приводятся задачи, предлагавшиеся на заключительных турах этих олимпиад.

Олимпиада «Поверь в себя!»

1. Тело движется прямолинейно с постоянным ускорением, отличным от нуля. За первую секунду движения тело прошло такой же путь $s = 4$ м, что и за третью секунду. Определите начальную скорость тела.

2. Твердое тело состоит из двух одинаковых однородных цилиндров радиусом R каждый, соединенных легкой пластиной. Тело поставили в двухгранный угол, как показано на рисунке 1. Расстояние между осями цилиндров $l = 3R$, угол полураствора $\alpha = 30°$. При каком коэффициенте трения между цилиндром и углом обеспечивается равновесие тела при любом наклонном его положении внутри угла?

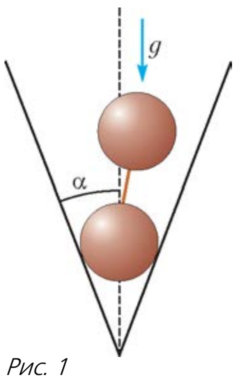


Рис. 1

3. В момент старта автогонщик для скорейшего набора скорости развил максимальную мощность двигателя $P = 500$ кВт. Машина при этом стала ускоряться в режиме проскальзывания двух ведущих колес вплоть до скорости $v = 50$ м/с. Какая часть совершенной двигателем работы перешла в энергию движения машины? Масса машины (с учетом массы гонщика) $M = 1000$ кг, коэффициент трения протекторов колес о дорогу $\mu = 0{,}5$.

4. Имеются три одинаковых баллона: в двух из них находится аргон под давлением $p_1 = 100$ кПа, а в третьем – гелий под давлением $p_2 = 400$ кПа. Какое установится давление смеси этих газов, если баллоны соединить между собой тонкими трубками? Начальные температуры газов одинаковы и равны конечной температуре смеси.

5. В замкнутом сосуде объемом $V = 5$ л находится идеальный одноатомный газ при давлении $p = 200$ кПа. Во сколько раз увеличится внутренняя энергия газа при сообщении ему количества теплоты $Q = 3$ кДж?

6. На гладкой горизонтальной поверхности находится однородно заряженное диэлектрическое полукольцо AB, которое может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его свободный конец A (рис.2). После того как медленно включили однородное электрическое поле, вектор напряженности $\vec{E}$ которого параллелен диаметру кольца в его первоначальном положении, полукольцо повернулось на угол α. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно вернуть полукольцо в первоначальное положение? Радиус полукольца R, его заряд q, модуль вектора напряженности E.

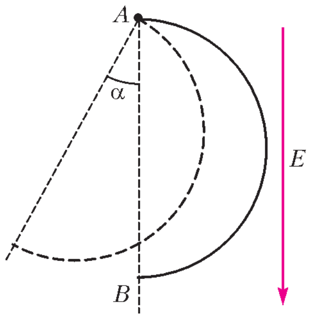


Рис. 2

7. К источнику с ЭДС $\mathscr{E} = 12$ В подключили параллельно соединенные между собой лампочку и вольтметр. При этом вольтметр показал напряжение $U = 10$ В, а на лампочке выделилась мощность $P = 5$ Вт. Найдите показание амперметра, включенного в данную цепь вместо вольтметра. Вольтметр и амперметр считайте идеальными.

8. Луч света падает на тонкую собирающую линзу с оптической силой $D = 5$ дптр под углом α к главной оптической оси и преломляется в линзе на расстоянии $h = 1$ см от ее оптического центра, как показано на рисунке 3. При каком максимальном значении угла α этот луч после преломления в линзе пересечет ее главную оптическую ось?

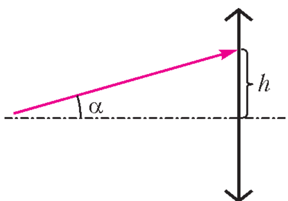


Рис. 3

Олимпиада «Ритм МИЭТ»

1. С ветки дерева, расположенной на высоте H = 5 м, с интервалом τ = 0,5 с отрываются капли воды и падают на тротуар. С какой минимальной скоростью должен идти пешеход, чтобы, не замочившись, проскочить опасное место? Считайте, что рост пешехода h = 180 см, диаметр его шапки D = 30 см, ускорение свободного падения $g = 10\ \text{м}/\text{с}^2$. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Костя Иночкин забежал в кабинет физики и при помощи суперклея закрепил в двух одинаковых ящиках три каких-то предмета. Потом взвесил ящики на пружинных весах – масса каждого из них оказалась равной 3 кг. Костя уронил ящики с нулевой начальной скоростью – один из них начал падать с ускорением g, а другой с ускорением $1{,}5g$. Какие предметы и как Костя закрепил в ящиках? Какова масса пустого ящика?

3. В однородном диске массой M и радиусом R вырезали круглое отверстие радиусом $R/2$ (рис.4). Диск может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку касания окружностей, ограничивающих диск и отверстие. Какую работу нужно совершить, чтобы медленно отклонить диск от положения равновесия на угол α? Ускорение свободного падения равно g.

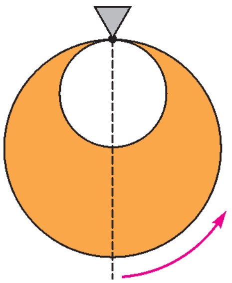


Рис. 4

4. Стеклянную бутылку плотно закрыли пробкой утром, а открыли днем. Какая часть воздуха вышла из бутылки при ее открывании, если температура воздуха изменилась от $t_1 = 18\ °\text{C}$ утром до $t_2 = 27\ °\text{C}$ днем? Атмосферное давление считайте постоянным.

5. В герметичном теплоизолированном сосуде под поршнем находится один моль гелия при температуре 27 °C и небольшая проволочная спираль, подключенная к источнику тока. Газ медленно переводят в новое состояние с бóльшим объемом и температурой 127 °C. Процесс проводят, перемещая поршень и пропуская по спирали электрический ток, причем делают это так, что в спирали выделяется минимально возможное количество теплоты $Q_{\min}$ = 2 кДж. Нарисуйте график этого процесса в координатах объем–давление и определите минимальную температуру газа в этом процессе. Теплоемкостью сосуда и поршня пренебречь.

6. В однородном электрическом поле напряженностью E_0 = 10 кВ/м закреплен точеный положительный заряд q = 1 нКл. Определите минимальную частоту обращения электрона по круговой орбите в рассматриваемом электростатическом поле. Удельный заряд электрона $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

7. К источнику напряжения подключены два последовательно соединенных резистора сопротивлениями R_1 = 10 кОм и R_2 = 20 кОм. Напряжение на первом резисторе U_1 = 50 В. Какое напряжение покажет вольтметр, если его подключить параллельно этому резистору? Сопротивление вольтметра $R_V = R_1$, внутренним сопротивлением источника пренебречь.

8. Луч света падает на тонкую рассеивающую линзу с оптической силой D = –10 дптр под углом к главной оптической оси и преломляется в линзе на расстоянии h = 1 см от ее оптического центра, как показано на рисунке 5. При каком минимальном значении угла α этот луч после преломления в линзе пересечет ее главную оптическую ось?

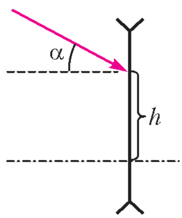


Рис. 5

Публикацию подготовили Г.Гайдуков, И.Горбатый

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №5)

1. 7 сольдо.

Сдача тремя разными монетами составляет не меньше чем 1 + 2 + 3 = 6 сольдо. Так как этих денег не хватило на мороженое, то оно стоит не меньше чем 7 сольдо. Больше чем 7 сольдо мороженое стоить не может, иначе на два мороженых Буратино потратил бы не меньше чем 8 + 8 = 16 сольдо, но у него была всего одна монета, т.е. не больше чем 20 сольдо, и тогда он не смог бы получить 6 сольдо сдачи. Значит, мороженое может стоить только 7 сольдо. Действительно, тогда процесс платы за мороженое выглядел так: 20 − 7 = 13; 13 − 7 = 6 = 1 + + 2 + 3.

2. Синего.

На первом цветном фото – 8 красных граней, на втором – 8 синих, на третьем – 8 желтых. Так как у четырех кубиков в совокупности $6 \times 4 = 24$ грани и $8 \times 3 = 24$, то на первом фото есть все красные грани, на втором – все синие, на третьем – все желтые. На фотографии параллелепипеда видны все четыре кубика, причем только у одного их них одна грань – видимая, а у каждого из трех остальных видны хотя бы две. На первом цветном фото есть два кубика, у которых только по одной красной грани, значит, искомый цвет не может быть красным. На третьем цветном фото есть кубик, в котором нет желтых граней, следовательно, искомый цвет не желтый. Таким образом, все видимые грани кубиков могут быть только синими. Это возможно, так как на втором цветном фото: 1) есть кубик с тремя синими гранями, имеющими общую вершину; 2) есть два кубика, у каждого из которых есть две соседние синие грани; 3) есть еще один кубик с синей гранью.

Отметим, что условие задачи позволяет определить, как раскрашены все кубики. Есть кубик с тремя смежными красными и тремя смежными синими гранями, кубик с тремя смежными красными, двумя желтыми и одной синей гранью и два одинаковых кубика с тремя смежными желтыми, двумя синими и одной красной гранью.

3. Из возможных примеров приведем два:

$$\frac{7}{4}+\frac{6}{8}+\frac{5}{1}+\frac{3}{2}=9, \quad \frac{5}{4}+\frac{6}{8}+\frac{9}{3}+\frac{2}{1}=7.$$

4. Да, может.

Примеры – на рисунке 1.

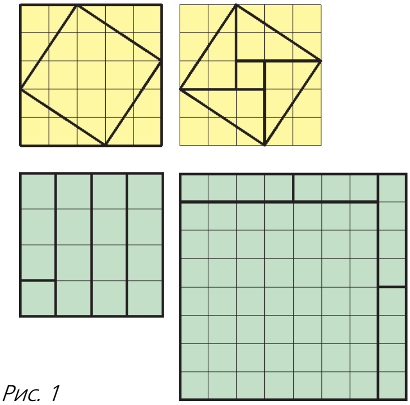


Рис. 1

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

(см. «Квант» №4)

24. 182.

Если какое-то качество у феи увеличивалось каждый день, то стать прежней она не могла. Значит, для того чтобы фея не изменилась, необходимо, чтобы каждое ее качество хотя бы один раз ухудшилось или все время оставалось прежним. Если фей хотя бы 183, то суммарно у них качеств $183 \cdot 2 = 366$ – это больше, чем число дней в году. Но каждый день ухудшается или остается прежним только одно качество у одной феи. Значит, такого быть не могло.

Покажем, что фей могло быть 182. Тогда у них 364 качества. Пусть каждый день происходит уменьшение одного из качеств, всего уменьшений 365. У 363 качеств будет по одному уменьшению за год и ровно настолько, насколько оно увеличилось за все остальные дни. А у оставшегося качества будет два уменьшения, опять же ровно настолько, насколько оно увеличилось за остальные 363 дня. Тогда феи к концу года станут такими же, какими были в его начале.

25. а) Да; б) да; в) нет.

а) Обозначим вершины четырехугольника A, B, C, D. Так как AC – хорда окружности, то серединный перпендикуляр к AC делит круг пополам. Построим точку E, симметричную точке D относительно серединного перпендикуляра. В силу симметрии точка E тоже будет лежать на границе круга, а также $AD = CE$ и $AE = BD$. Тогда четырехугольник $ABCE$ – искомый: он лежит внутри круга и длины его сторон такие же, как и у исходного четырехугольника, однако их порядок изменился. (Фактически мы разрезали четырехугольник по диагонали AC, перевернули треугольник ADC и снова соединили в четырехугольник.) Обратите внимание, что мы пользовались только тем, что AC – хорда окружности, поэтому если точки B и D будут лежать внутри круга, то рассуждение останется верным.

б) Рассмотрим описанные окружности треугольников ABC и ABD. Если точка D лежит вне описанной окружности ABC, то точка C лежит внутри описанной окружности ABD. Итак, для одной из этих окружностей (назовем ее ω) верно, что на ней лежат две противоположные вершины $ABCD$, а все остальные вершины лежат внутри нее или на границе. Пусть, для определенности, на ее границе лежат точки A и C. Хорда AC окружности ω делит ее на два сегмента, один из которых лежит целиком внутри исходной окружности (так как если сегмент не лежит внутри исходной окружности, то ограничивающая его дуга пересекает исходную окружность в двух точках, а две разные окружности могут иметь не больше двух общих точек). Значит, для этого сегмента можно применить соображения из решения пункта а): часть четырехугольника, лежащую в этом сегменте, отразим относительно серединного перпендикуляра к отрезку AC. После отражения стороны поменяются местами и останутся внутри сегмента, а значит, и внутри исходного круга.

в) Возьмем четырехугольник $ABCD$ со сторонами $AB = BC = 1000$, $CD = DA = 1001$, который лежит в круге диаметром 1002 (рис.2). Возьмем четырехугольник $EFGH$ со сторонами $EF = GH = 1000$, $FG = HE = 1001$ и покажем, что он не может лежать внутри круга. Так как противоположные стороны четырехугольника равны, это параллелограмм. Один из его углов, скажем EFG, неострый, а значит, в треугольнике EFG: $EG^2 \geq EF^2 + GF^2$ (это следует из теоремы косинусов). Отсюда $EG > 1400$, что больше диаметра круга. Противоречие.

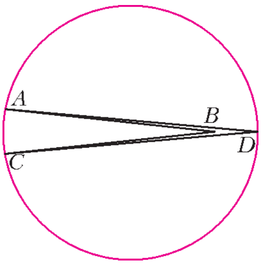


Рис. 2

26. 450.

Пусть первый ход был вверх. У каждой клетки две координаты – номер ее строки и номер ее столбца. Если мы идем от клетки $(1, 1)$ до клетки (8,8), то маршрут имеет вид

$$(1,1)-(1,y_1)-(x_1,y_1)-(x_1,y_2)-(x_2,y_2)-(x_2,8)-(8,8).$$

Он однозначно восстанавливается по клеткам (x_1, y_1) и (x_2, y_2), в которых были сделаны 2-й и 4-й повороты. Таким образом, нужно выбрать две пары $1 < x_1 < x_2 < 8$, $1 < y_1 < y_2 < 8$. Выбрать такие числа x_1 и x_2 – то же, что выбрать два из шести разных предметов, это можно сделать $C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ способами. Столько же способов выбрать y_1 и y_2. Значит, выбрать x_1, x_2, y_1 и y_2 можно $15^2 = 225$ способами.

Столько же способов для случая, когда первый ход был вправо.

Всего способов 225 + 225 = 450.

27. Степени числа 4 дают остаток 1 при делении на 3, значит, $A_n = 4^{4n+1} + 4^{3n+1} + 1$ кратно трем. Раскрыв скобки, нетрудно проверить тождество:

$$A_n = 4^{4n+1} + 4^{3n+1} + 1 = 2^{8n+2} + 2^{6n+2} + 1 =$$
$$= \left(2^{4n+1} + 2^{3n+1} + 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1\right) \times$$
$$\times \left(2^{4n+1} - 2^{3n+1} + 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1\right).$$

Итак, мы представили A_n в виде произведения двух целых чисел. Осталось показать, что каждое из них больше трех, откуда будет следовать, что число $\frac{1}{3}A_n$ составное:

$$2^{4n+1} + 2^{3n+1} + 2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1 >$$
$$> 2^{4n+1} - 2^{3n+1} + 2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1 =$$
$$= \left(2^{3n+1} + 2^{n+1}\right)\left(2^n - 1\right) + 1 > 2^{3n+1} > 3.$$

МАГИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ (ЗА КУЛИСАМИ)

7. Уравнение сводится к квадратному:

$$\cos\varphi = \frac{a + a^{-1}}{2} \Leftrightarrow a^2 - 2a\cos\varphi + 1 = 0$$

с дискриминантом $D = 4\left(\cos^2\varphi - 1\right) \leq 0$. Как же быть? Вспомним, откуда вообще берется дискриминант. Правильно – при выделении полного квадрата:

$$a^2 + pa + q = \left(a + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{D}{4}, \text{ где } D = p^2 - 4q,$$

что в случае $D \geq 0$ преобразуется как разность квадратов. Но с комплексными числами мы умеем раскладывать и сумму квадратов, так что отрицательными дискриминантами нас не напугать:

$$a^2 - 2a\cos\varphi + 1 = (a - \cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi =$$
$$= (a - \cos\varphi - i\sin\varphi)(a - \cos\varphi + i\sin\varphi).$$

8. После преобразований выражения $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3$ и правда получаем формулы тройного угла:

$$4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi + i\left(3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi\right) =$$
$$= \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi.$$

9. Распишем левую часть формулы по биному

Ньютона:

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \left(\cos\varphi\right)^{n-k} \left(i\sin\varphi\right)^k$$

и отделим действительные слагаемые (дающие $\cos n\varphi$). Ясно, что $\left(i\sin\varphi\right)^k \in \mathbb{R}$ (для всех φ) в точности при четных k, но четная степень синуса есть многочлен от косинуса: $\left(\sin\varphi\right)^{2m} = \left(1-\cos^2\varphi\right)^m$. Итак,

$$\cos n\varphi = \sum_{\substack{0\le k\le n \\ k \text{ четно}}} C_n^k \left(\cos\varphi\right)^{n-k} \left(\cos^2\varphi - 1\right)^k = T_n\left(\cos\varphi\right).$$

11. а) $\frac{1}{2^n}$. Подставьте $x = -1$.

б) $\frac{\sqrt{n}}{2^n}$. Подставьте $x = 1$.

15. Например, для $r = 0$ рассмотрите

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1+\varepsilon^k\right)^n, \text{ где } \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

16. Используйте формулы суммы косинусов $c_k c_l = c_{k+l} + c_{k-l}$, где индексы рассматриваются по модулю 17. Кроме того, ввиду четности косинуса, $c_k = c_{-k}$. Тогда:

а) c_1, c_4 – корни трехчлена $t^2 - y_1 t + y_2$;

б) $\left(c_1+c_4\right)\left(c_2+c_8\right) = c_1 + \ldots + c_8 = -1$, так как это сумма абсцисс векторов с концами в вершинах правильного 17-угольника, кроме вершины $(1, 0)$;

в) можно убедиться, что при раскрытии скобок сумма $c_1 + \ldots + c_8$ повторится 4 раза.

О том, как догадаться до формул (25)–(27), мы расскажем в отдельной статье.

ЗНАНИЕ – СИЛА!

3. На третьего мудреца надет красный колпак.

4. На первого мудреца надет желтый колпак.

5. Если первому математику сообщили число n, а второму $n + 1$, то первый раз «да» ответит первый математик на n-й вопрос второго математика. Если, наоборот, первому математику сообщили число $n + 1$, а второму n, то первый раз «да» ответит второй математик на n-й вопрос первого математика.

АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ КОМПЛЕКСНЫХ ЧИСЕЛ

10. а) $2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

б) $\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$. Отметим, что $1+\left(2-\sqrt{3}\right)^2 = 2\left(1-\sqrt{3}\right)^2$ и $2-\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$ (рис.3).

в) $2\left|\cos\frac{\varphi}{2}\right|\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)$. Аргумент $\frac{\varphi}{2}$ можно

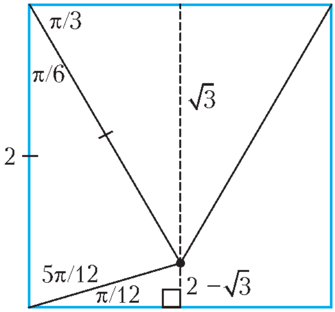


Рис. 3

найти алгебраически:

$$\frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

или геометрически (рис. 4).

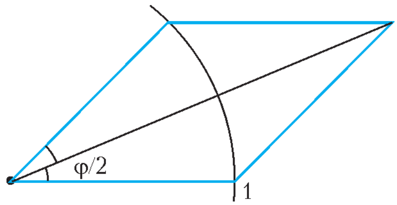


Рис. 4

11. $\forall\varphi\; n\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \equiv \frac{\pi}{2} - n\varphi \pmod{2\pi} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod 4$.

12. Сделаем замену $x = \operatorname{tg}\pi$:

$$\exists x \in \mathbb{R}\; z = \frac{x+i}{x-i} \Leftrightarrow \exists\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\; z = \frac{\operatorname{tg}\varphi + i}{\operatorname{tg}\varphi - i} =$$
$$= \frac{\sin\varphi + i\cos\varphi}{\sin\varphi - i\cos\varphi} = \cos\left(\pi - 2\varphi\right) + i\sin\left(\pi-2\varphi\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |z| = 1 \ne z.$$

14. б) При нечетном n имеем $x^n + 1 = -\left(\left(-x\right)^n - 1\right)$, поэтому при нечетных m, n задача сводится к п. а): $\left(x^m+1, x^n+1\right) = x^{(m,n)} + 1$. Такой же ответ, если m и n делятся на одну и ту же степень двойки. В противном случае легко проверить, что $\sqrt[m]{-1} \cap \sqrt[n]{-1} = \varnothing$, а значит, $\left(x^m+1, x^n+1\right) = 1$.

15. б) $z = 0$ или $\arg z^5 \in 2\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \arg z \in \frac{2\pi}{5}\mathbb{Z}$.

в) $\{0\} \cup \sqrt[\frac{n-m}{2}]{1} \setminus \{1\}$. Так как

$$(m+1)(n+1) = \left(\frac{m+n}{2}+1\right)^2 \Leftrightarrow (m-n)^2 = 0,$$

что неверно, то $z \ne 1$. Умножим обе части на $(z-1)^2$:

$$\left(z^{m+1}-1\right)\left(z^{n+1}-1\right)=\left(z^{\frac{m+n}{2}+1}-1\right)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^{m+1}+z^{n+1}=2z^{\frac{m+n}{2}+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z^{m+1}\left(z^{n-m}-2z^{\frac{n-m}{2}}+1\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z=0 \text{ или } z^{\frac{n-m}{2}}=1.$$

16. $x\in\frac{2\pi}{7}\mathbb{Z}$.
Относительно $\cos x$ уравнение кубическое и выполняется при $\cos x=\cos\frac{2\pi k}{7}$, $k=1,\ 2,\ 3$, а значит, других решений нет.

17. а) $\sqrt[mn]{z^m}\supseteq\sqrt[n]{z}$; б) $\left(\sqrt[n]{z}\right)^m\subseteq\sqrt[n]{z^m}$.

18. $\sqrt[m]{1}\sqrt[n]{1}=\sqrt[mn]{1}\Leftrightarrow\left\{\frac{2\pi k}{m}+\frac{2\pi l}{n}\,\middle|\,k,l\in\mathbb{Z}\right\}=$
$=\frac{2\pi}{mn}\mathbb{Z}\Leftrightarrow\left\{kn+lm\,|\,k,l\in\mathbb{Z}\right\}=\mathbb{Z}\Leftrightarrow(m,n)=1$.

19. Число $\frac{2+i}{2-i}=\frac{3+4i}{5}$ – корень из единицы $\Leftrightarrow$ его аргумент имеет вид $\frac{2\pi m}{n}$, где $m,n\in\mathbb{Z}$. Тогда $\cos\frac{2\pi m}{n}=\frac{3}{5}$. Возьмем от обеих частей многочлен Чебышёва T_n: $\cos(2\pi m)=T_n\left(\frac{3}{5}\right)$, откуда $\frac{3}{5}$ – корень многочлена
$T_n(x)-1=2^{n-1}x^n+\ldots+T_n(0)-1\in\mathbb{Z}[x]$, причем $T_n(0)\in\{0,\pm1\}$, поэтому рациональные корни этого многочлена имеют вид $\pm\frac{1}{2^k}$, $k<n$. Противоречие.

20. Известно, что с помощью циркуля и линейки по отрезкам с длинами a, b, c можно построить четвертое пропорциональное $\frac{ab}{c}$ и среднее геометрическое $\sqrt{ab}$. В частности, имея единицу, можно построить ab, $\frac{a}{c}$, $\sqrt{a}$ (рис.5). На рисунках, где единичная окружность, данная в условии, не понадобилась, она изображена пунктиром.

21. б) Окружность с центром $1+i$ радиуса $\sqrt{2}$ (проходит через 0); в) отрезок с концами $\pm i$; г) $\mathbb{R}\cup i\,\mathbb{R}$; д) $i\,\mathbb{R}\cup\left(\sqrt{3}+i\right)\mathbb{R}\cup\left(\sqrt{3}-i\right)\mathbb{R}$.

22. а) Вершины правильного треугольника с центром в 0; б) вершины прямоугольника с центром в нуле.

24. а) $z-a\perp a\Leftrightarrow\frac{z-a}{a}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{z-a}{a}+\frac{\bar z-\bar a}{\bar a}=0\overset{\bar a=a^{-1}}{\Leftrightarrow}\bar az+a\bar z=2.$$

Аналогично $\bar bz+b\bar z=2$. Исключая из этих уравнений $\bar z$, находим $z=\frac{2ab}{a+b}$.

б) $\frac{z-a}{z-d}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{z-a}{z-d}=\frac{\bar z-a^{-1}}{\bar z-d^{-1}}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(d-a)\bar z+\frac{d-a}{ad}z=\frac{d^2-a^2}{ad}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ad\bar z+z=a+d.$$

Аналогично, $bc\bar z+z=b+c$. Вычитая, получаем $\bar z=\frac{a+d-b-c}{ad-bc}$.

30. Можно считать, что $A_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$ $(-n\le k\le n)$ и $M=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $\frac{2\pi n}{2n+1}\le\varphi\le$ $\le\pi$. Тогда

$$MA_k=\sqrt{\left(\cos\varphi-\cos\frac{2\pi k}{2n+1}\right)^2+\left(\sin\varphi-\sin\frac{2\pi k}{2n+1}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{2-2\cos\left(\varphi-\frac{2\pi k}{2n+1}\right)}=2\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi k}{2n+1}\right).$$

Домножим это на $\sin\frac{\pi}{2n+1}$ и просуммируем по $k\in K$, где K – множество либо четных, либо нечетных чисел отрезка $[-n,n]$:

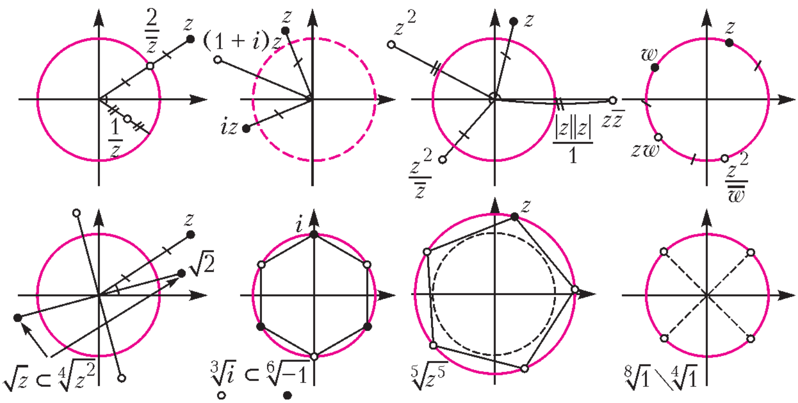


Рис. 5

$$\sum_{k\in K} 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi k}{2n+1}\right)\sin\frac{\pi}{2n+1} =$$

$$= \sum_{k\in K}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi(k+1)}{2n+1}\right)-\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi(k-1)}{2n+1}\right)\right).$$

Поскольку K – арифметическая прогрессия с разностью 2, то в сумме останутся только крайние слагаемые. Именно, если $\max\ K = t$, то $\max\ K = -t$ и сумма равна

$$\cos\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi(t+1)}{2n+1}\right)-\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi(t+1)}{2n+1}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\pi(t+1)}{2n+1}.$$

В зависимости от четности чисел в K, $t = n$ или $n-1$ – в обоих случаях получается одно и то же, так как $\sin\frac{\pi(n+1)}{2n+1} = \sin\frac{\pi n}{2n+1}$. Обобщенная теорема Помпею доказана. Обратите внимание, как грамотный выбор обозначений облегчил техническую часть решения.

СЧЕТЧИКИ И РАССТОЯНИЯ В ГРАФАХ

Задачи для самостоятельного решения

Указания

1, 2. Можно расставить в клетки счетчик, двигаясь от цели «с конца».

3. Счетчик: количество томов, стоящих на своем месте.

4. Счетчик: количество блоков подряд сидящих мальчиков.

5. Счетчик: количество блоков подряд идущих карт одного типа (рубашкой вверх или рубашкой вниз).

6. а), б) Счетчик: сумма номеров мест, на которых стоят нолики.

в) Для каждого нолика рассмотрим минимальное необходимое количество обменов его с крестиками. Нужным счетчиком является сумма этих количеств по всем ноликам.

7. Счетчик: количество «беспорядков».

8. Счетчик: количество цифр плюс сумма цифр в двоичной записи.

9. а) Счетчик: наибольший из объемов кусков (которые есть в текущей ситуации).

б) Для «кирпича» $a\times b\times c$ введем «сложность», равную $\lceil\log_2 a\rceil+\lceil\log_2 b\rceil+\lceil\log_2 c\rceil$. Нужным счетчиком является наибольшая из сложностей по всем кускам.

10. Покрасим ромбики одного типа (совмещаемые параллельным переносом). При операциях окрашенные ромбики могут передвигаться только параллельно фиксированной прямой, скажем только по вертикали. Тогда подойдет счетчик: сумма ординат центров покрашенных ромбиков. (Подробное решение и пространственную интерпретацию можно найти в статье Е.Карпова и К.Кохася «Разбиения на домино и функции высоты» в «Кванте» №6 за 2010 год.)

11. Счетчик: количество «беспорядков» в парах соседних карт.

12. Счетчик: суммарный периметр покрашенной области.

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «МИЭТ»

ОЛИМПИАДА «ПОВЕРЬ В СЕБЯ!»

1. $v_0 = 6$ м/с. **2.** $\mu \ge \frac{4-\sqrt{7}}{3} \approx 0{,}45$.

3. $\eta = \frac{\mu Mgv}{4P} = 0{,}125$.

4. $p = \frac{2p_1+p_2}{3} = 200$ кПа.

5. $\frac{U_2}{U_1} = 1+\frac{2Q}{3pV} = 3$.

6. $A = \left(\frac{1}{\cos\alpha}-1\right)qER$.

7. $I = \frac{\mathscr{E}P}{(\mathscr{E}-U)U} = 3$ А.

8. $\alpha_{max} = \mathrm{arctg}(hD) = \mathrm{arctg}\,0{,}05 \approx 2{,}9°$.

ОЛИМПИАДА «РИТМ МИЭТ»

1. $v_{min} = \frac{D}{\sqrt{2(H-h)/g}-\sqrt{2H/g}+\tau} = 1$ м/с.

2. В одном ящике Костя жестко закрепил груз массой 1 кг, а в другом он такой же груз подвесил на легкой пружинке к «потолку» ящика. Масса пустого ящика 2 кг.

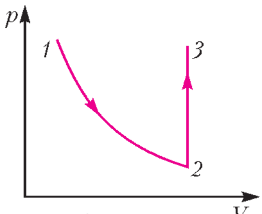


Рис. 6

3. $A = \frac{7}{8}MgR(1-\cos\alpha)$.

4. $\delta = \frac{t_2-t_1}{t_2+273} = 0{,}03$.

5. $t_{min} = -34$ °С; см. рис.6 (процесс *1–2* – адиабатическое расширение).

6. $\omega_{min} = \sqrt{\frac{e}{m}E_0\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 E_0}{q}}} \approx 5{,}9\cdot 10^8\ \text{с}^{-1}$.

7. $U_V = \frac{U_1(R_1+R_2)}{R_1+2R_2} = 30$ В.

8. $\alpha_{min} = \mathrm{arctg}(-hD) = \mathrm{arctg}\,0{,}1 \approx 5{,}7°$.

LXXX МОСКОВСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

(см. «Квант» №5)

8 класс

1. $16^5 = 32^4$.

2. Воспользуемся тем, что если прямая l равноудалена от A и B, то либо она параллельна AB, либо проходит через середину отрезка AB (докажите этот факт).

Доказывать требуемое в задаче будем от противного: пусть никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Рассмотрим произвольную сторону треугольника и прямые, равноудаленные от ее концов: не более одной прямой параллельно стороне и не более двух прямых проходят через середину стороны. Всего для трех сторон получаем не более девяти прямых. Противоречие.

3. 34.

Приведем пример для 34 положительных чисел. Возьмем все числа равными 1 по модулю, а знаки расставим следующим образом (рис.7):

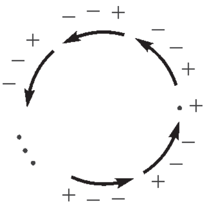


Рис. 7

сначала +, потом 33 группы +−−, считая против часовой стрелки. Тут всего одна пара соседних положительных чисел и 33 пары соседних отрицательных − они и дадут 34 положительных произведения; остальные произведения будут отрицательными.

Докажем, что положительных чисел было не менее 34. Предположим, что их не более 33. Отрицательные числа в произведении могут образовываться, только если один из сомножителей положительный, причем каждое положительное число может участвовать не более чем в двух таких произведениях. Следовательно, отрицательных чисел не более 66. Но тогда всего чисел не более 99, противоречие.

5. Оценку «a баллов из n возможных» будем обозначать кратко a/n или $\frac{a}{n}$. Оценки $0/n$ и n/n будем называть *крайними*.

Лемма 1. Если последовательно менять шкалы в порядке $100 \to 99 \to 98 \to 97 \to \ldots \to 3 \to 2$, то любая некрайняя оценка $a/100$ превратится в $1/2$.

Доказательство. Достаточно заметить, что при этих заменах шкал некрайние оценки остаются некрайними, так как при всех $k > 1$ оценка $1/k$ ближе к любой некрайней оценке вида $a/(k+1)$, чем $0/k$; значит, на очередном шаге после округления оценка $0/k$ не могла получиться (аналогично с k/k). Таким образом, в конце останется некоторая некрайняя оценка в двухбалльной шкале, т.е. $1/2$. Лемма доказана.

Лемма 2. Дано натуральное число k. Если менять шкалы в порядке

$$2 \to 3 \to 4 \to 6 \to 8 \to \ldots \to 2\cdot 2^s \to$$
$$\to 3\cdot 2^s \to 2\cdot 2^{s+1} \to \ldots \to 2^k,$$

то можно получить из исходной оценки $1/2$ любую оценку вида $(2r+1)/2^k$, где $0 \le r < 2^{k-1}$.

Доказательство. Будем вести индукцию по k.

База: $k = 1$. Никаких операций не произошло, начальное состояние $1/2$.

Переход: предположим, что утверждение леммы верно для параметра $k-1$; докажем его для параметра k. Наша цель − получить оценку $(2r+1)/2^k$. Рассмотрим случай, когда r нечетно. По предположению индукции за первые $2(k-2)$ замен шкал можно получить оценку $r/2^{k-1}$. Выясним, что произойдет при переходе в следующую шкалу $\left(2^{k-1} \to 3\cdot 2^{k-2}\right)$:

$$3\cdot 2^{k-2} = 3/2\cdot 2^{k-1}; \quad r \to \frac{3r}{2}.$$

Это полуцелое число округлим до $(3r+1)/2$. При переводе в финальную шкалу $\left(3\cdot 2^{k-2} \to 2^k\right)$ оценка $(3r+1)/2$ перейдет в

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{3r+1}{2} = 2r + \frac{2}{3},$$

что округляется до $2r + 1$. Случай четного r разбирается аналогично, при этом возникает следующая последовательность оценок:

$$\frac{r+1}{2^{k-1}} \to \frac{(3r+2)/2}{3\cdot 2^{k-2}} \to \frac{2r+1}{2^k}.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. Всякая некрайняя оценка вида $a/100$ может быть получена из некоторой нечетной оценки по шкале от 0 до 256 в результате замены шкал $256 \to 100$.

Доказательство. От противного: пусть некоторая оценка $a/100$ не получается таким действием. Тогда в интервале $\left(\frac{a}{100} - \frac{1}{200}, \frac{a}{100} + \frac{1}{200}\right)$ нет дробей вида $\frac{r+1}{256}$. Но длина этого интервала равна $\frac{1}{100}$, а расстояние между соседними дробями такого вида равно $\frac{1}{128}$, что меньше. Противоречие, лемма доказана.

Теперь решим задачу. Вначале будем действовать по алгоритму из леммы 1 и приведем обе оценки к состоянию $1/2$. Затем, действуя согласно лемме 2 (рис.8), можно получить из двух

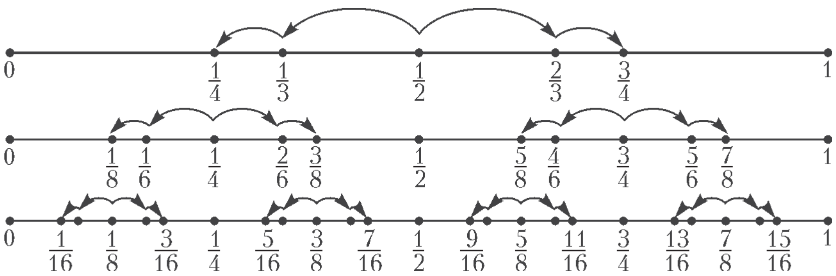


Рис. 8. Первые шесть шагов алгоритма из леммы 2 в решении задачи 5. Каждая следующая пара шагов содержит две «копии» предыдущей пары, сжатые в два раза

экземпляров $1/2$ любую пару нечетных оценок по шкале от 0 до 256. Лемма 3 гарантирует нам, что при возврате в исходную шкалу от 0 до 100 можно получить любую пару оценок.

9 класс

1. 3750.

По условию $\overline{aA} = 5A$ (где A – число, составленное из всех цифр, кроме первой, a – первая цифра). Пусть n – количество цифр в числе $\overline{aA}$. Отсюда $4A = a\cdot 10^{n-1} \Rightarrow A = 25a\cdot 10^{n-3}$. Если $n > 4$, то у числа A, а значит и у искомого числа, есть две совпадающие цифры (два нуля на конце). Если же $n = 4$, то $A = 250a$. Ясно, что чем больше a, тем больше исходное число. При $a \ge 4$ число $250a$ состоит из четырех цифр, а не из трех. При $a = 3$ мы получаем $A = 750$, а исходное число равно 3750. Значит, наибольшее искомое число равно 3750.

4. $a = 1$, k – любое.

Если $a = 1$, то $a^{k^n+1} - 1 = 0$, а значит, делится на n. Пусть теперь $a \ge 2$. Возьмем $n = a^k - 1$, тогда $a^k \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$ и, следовательно,

$$0 \equiv a^{k^n+1} - 1 \equiv \left(a^k\right)^{k^{n-1}} \cdot a - 1 \equiv 1^{k^{n-1}} \cdot a - 1 \equiv$$
$$\equiv a - 1\left(\operatorname{mod} a^k - 1\right).$$

Такое может быть только при $k = 1$, но в этом случае $a^{k^n+1} - 1 = a^2 - 1$ должно делиться на все n, что невозможно. Таким образом, пары, в которых $a \ge 2$, нам не подходят.

10 класс

1. Нет, не могло.

Пусть x_1, x_2 – корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$. Тогда по теореме Виета

$$x_1 + x_2 = -b\,, \qquad (1)$$

$$x_1 x_2 = c\,. \qquad (2)$$

Предположим, что утверждение задачи верно, тогда

$$x_1 + 1 + x_2 + 1 = \frac{b+1}{2}\,, \qquad (3)$$

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) = \frac{c+1}{2}\,. \qquad (4)$$

Подставим (1) в (3) и найдем $b = 5$.
Подставим (1) и (2) в (4) и найдем $c = 9$.
Стало быть, искомый квадратный трехчлен, если он существует, имеет вид $x^2 + 5x + 9$. Однако же дискриминант такого трехчлена отрицателен. Значит, описанная в задаче ситуация невозможна.

2. Красного.

Заметим, что если число b^n синего цвета, то число b тоже синего цвета (доказывается от противного). Так как $1024 = 2^{10}$, из этого следует, что число 2 синее.

Также заметим, что если число a синего цвета, то любое число $n \cdot a$ $(n \in \mathbb{N})$ тоже синего цвета (следует из условия задачи при помощи принципа математической индукции). Значит, поскольку 2 синее, то все четные числа также синие.

Предположим, что 2017 синего цвета. Тогда все нечетные числа, начиная с 2017, тоже будут синего цвета. Таким образом, все числа, начиная с 2017, синие. По условию, мы используем оба цвета. Это значит, что какое-то нечетное число k $(k < 2017)$ покрашено в красный цвет. Но тогда и любая степень k тоже красная. Так как $k \ge 2$, то существует степень, которая превосходит 2017. Получается, что она одновременно покрашена и в синий, и в красный цвет, что невозможно. Поэтому 2017 может быть только красного цвета.

Красным оно как раз будет, если мы покрасим все четные числа в синий цвет, а нечетные – в красный. Легко убедиться, что данная раскраска удовлетворяет условию задачи.

3. $\angle B = 45^\circ$.

Обозначим через ω окружность, описанную около треугольника ABC, через ω_1 – окружность, описанную около ΔACO (рис.9). Пусть $\angle ABC = \beta$. Тогда $\angle AOC = 2\beta$, как центральный для угла ABC относительно окружности ω. Далее, $\angle AEC = \angle AOC = 2\beta$, как опирающиеся на дугу AC окружности ω_1. Так как угол AEC внешний для треугольника CEB, $\angle ECB = 2\beta - \beta = \beta$, значит, треугольник CEB –

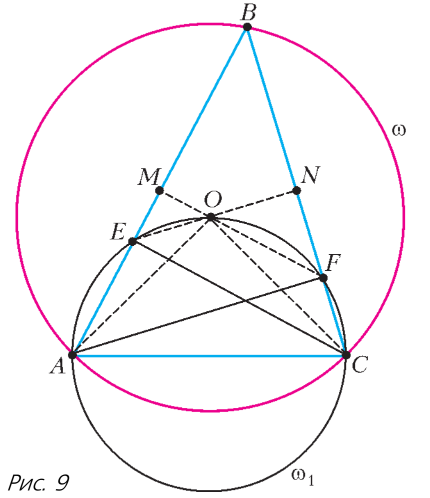


Рис. 9

равнобедренный. Аналогично, $\angle AFC = 2\beta$, угол AFC внешний для треугольника AFB, значит, $\angle BAF = \beta$, треугольник ABF тоже равнобедренный.

По формуле длины основания равнобедренного треугольника, $AB = 2BF\cos\beta$ и $BC = 2BE\cos\beta$. Перемножив эти равенства, получим $AB \cdot BC = 4B \cdot EBF\cos^2\beta$. Кроме того, из отношения площадей треугольников ABC и BEF, данного в условии, получаем $\dfrac{S_{BAC}}{S_{BEF}} = \dfrac{AB \cdot BC}{BE \cdot BF} = 2$. Отсюда следует, что $1 = 2\cos^2\beta$. Так как $2\beta < 180°$, имеем $\cos\beta > 0$, значит, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \beta = 45°$.

4. См. решение задачи 3 сложного варианта для 10–11 классов весеннего тура XXXVIII Турнира городов («Квант» №5).

5. См. решение задачи 6 сложного варианта для 10–11 классов весеннего тура XXXVIII Турнира городов («Квант» №5).

11 класс

Первый день

1. 1520.

Заметим сразу, что и до, и после перестановки цифр число делится на 10 и поэтому должно оканчиваться на 0. Покажем, что нет трехзначных чисел, обладающих описанным в условии задачи свойством. Действительно, если $\overline{ab0} = 100a + 10b = 80k$ и $\overline{ba0} = 100b + 10a = 80l$, $a < b$, то цифры a и b четны, причем $\overline{ba0} - \overline{ab0} = 90(b-a) = 80(l-k)$, поэтому $b - a$ делится на 8. Это возможно только при $b = 8$, $a = 0$, но 0 не может быть первой цифрой числа. Попробуем найти требуемое число среди четырехзначных чисел, начинающихся с 1, т.е. чисел вида $\overline{1ab0} = 1000 + 100a + 10b$. Если поменять местами цифры 1 и b, то оно не будет делиться на 80. Если переставить цифры a и b, $a < b$, то, аналогично рассуждению для трехзначных чисел, получаем единственный вариант $b = 8$, $a = 0$, но число 1080 не кратно 80. Значит, может подойти только число, в котором переставлены цифры 1 и a, где $a > 1$. Если числа $\overline{1ab0}$ и $\overline{a1b0}$ кратны 80, то их разность $\overline{a1b0} - \overline{1ab0} = 900(a-1)$ также кратна 80, т.е. $900(a-1) = 80m$, $45(a-1) = 4m$. Значит, $a - 1$ делится на 4, что возможно только при $a = 5$ или $a = 9$. Но уже при $a = 5$ и $b = 2$ получаем число $1520 = 19 \cdot 80$, удовлетворяющее условию задачи, так как $2520 = 64 \cdot 80$.

2. Пусть K и L – середины отрезков AQ и QC соответственно, которые по условию лежат на вписанной окружности (рис.10). Отрезок KL – средняя линия в треугольнике AQC, поэтому $KL \parallel AC$. Параллельные прямые KL и AC высекают на вписанной окружности равные дуги KS и SL. Значит, опирающиеся на них углы KQS и SQL равны.

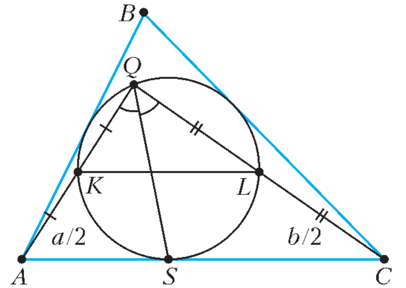


Рис. 10

3. а) $x_0 > y_0$; б) 0.

Для краткости обозначим степень 2017 через n.

а) Заметим, что $y_0 > 1$, так как $y_0^{2n} - y_0 = 3x_0 > 0$. Аналогично, поскольку x_0 удовлетворяет уравнению $x_0^n - x_0 = 1 > 0$, то и $x_0 > 1$. Следовательно, $1 + x_0 + x_0^2 > 3x_0$, так как это неравенство равносильно неравенству $(1 - x_0)^2 > 0$, которое выполнено при $x_0 \neq 1$. Тогда $x_0^{2n} - x_0 = 1 + x_0 + x_0^2 > 3x_0 = y_0^{2n} - y_0$. Поскольку функция $f(t) = t^{2n} - t$ строго возрастает при $t > 1$ (так как при этих t имеем $f'(t) = 2nt^{2n-1} - 1 > 0$), получаем $x_0 > y_0$.

б) Проверим, что $x_0 < 1 + \dfrac{1}{n}$. Действительно,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 - \frac{1}{n} = 1 + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \vartheta_n - \frac{1}{n} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2n} + \vartheta_n > 1$$

при $n \geq 3$ (через $\vartheta_n > 0$ обозначены остальные слагаемые биномиального разложения), а значит, в силу возрастания при $t > 1$ функции

$g(t) = t^n - t$ справедливо неравенство $x_0 < 1 + \frac{1}{n}$. Далее, вычтем из равенства $x_0^{2n} - x_0 = 1 + x_0 + x_0^2$ равенство $y_0^{2n} - y_0 = 3x_0$. Получим

$$y_0^{2n} - y_0^{2n} - (x_0 - y_0) = (1 - x_0)^2 < \frac{1}{n^2}.$$

Поскольку

$$x_0^{2n} - y_0^{2n} = (x_0 - y_0)\left(x_0^{2n-1} + x_0^{2n-2}y_0 + \ldots + x_0 y_0^{2n-2} + y_0^{2n-1}\right) > 2n(x_0 - y_0),$$

справедливы неравенства

$$(2n-1)(x_0 - y_0) \le x_0^{2n} - y_0^{2n} - (x_0 - y_0) < \frac{1}{n^2}.$$

Таким образом,

$$0 < x_0 - y_0 < \frac{1}{(2n-1)n^2} = \frac{1}{2017^2 \cdot 4033} < \frac{1}{16 \cdot 10^9} < \frac{1}{10^{10}},$$

а значит, первые 10 знаков после запятой разности $x_0 - y_0$ равны нулю.

4. 75.

Всюду далее будем без ограничения общности считать, что все велосипедисты едут по треку против часовой стрелки, причем первый из них – самый быстрый, а третий – самый медленный, а также будем рассматривать движение всех велосипедистов относительно второго из них (т.е. в системе отсчета, в которой второй велосипедист остается неподвижен).

Обозначим через A точку, в которой постоянно находится второй велосипедист. Тогда первый и третий велосипедисты движутся относительно этой точки против и по часовой стрелке соответственно. Они периодически встречаются друг с другом через равные промежутки времени, поскольку едут с постоянными скоростями навстречу друг другу. Обозначим через $B_1, B_2, B_3, \ldots$ последовательные точки их встреч с начала наблюдения за этими спортсменами (рис.11). Любые две соседние точки B_n и B_{n+1} (n – произвольное натуральное число) различны, так как первый велосипедист не сможет сделать полный круг против часовой стрелки, не встретившись при этом с третьим. Обозначим через β_n меньшую из двух дуг трека с концами B_n, B_{n+1}. Ее длина не превосходит 150 метров. Поскольку встречи происходят периодически со сдвигом в одном направлении, все дуги β_n равны между собой и объединение нескольких из них покрывает весь трек. Значит, найдется такая дуга β_m, содержащая точку A, что длина одной из дуг B_mA или AB_{m+1} не превосходит 75 метров. Таким образом, в какой-то момент встречи первого и третьего велосипедистов они будут находиться от второго велосипедиста не дальше 75 метров. Поэтому фотограф заведомо сможет сделать удачный снимок, если d не больше 75 метров.

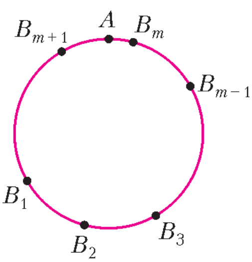


Рис. 11

Приведем пример движения велосипедистов, при котором ни в какой момент времени они не могут оказаться на каком-либо участке трека длиной меньше 75 метров. Пусть скорости велосипедистов образуют арифметическую прогрессию, а в момент какой-то из встреч первого и третьего из них второй был впереди на 75 метров. Тогда относительно точки A, где постоянно находится второй велосипедист, первый и третий движутся с равными по величине, но различными по направлению скоростями. Следовательно, они будут встречаться поочередно в точках B и C, отстоящих от точки A на 75 метров, а их положения в каждый момент времени будут симметричны относительно прямой BC (рис.12). Значит, в каждый момент времени расстояние от одного из них до точки A будет не меньше 75 метров.

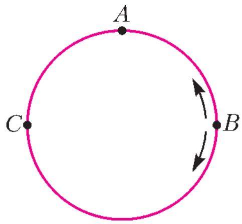


Рис. 12

5. $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$.

Пусть длина ребра меньшего куба равна $a < 1$. Раскрасим его вершины в черный и белый цвета так, чтобы вершины, соединенные ребром, были окрашены в разные цвета. Тогда расстояние между любыми двумя точками одного цвета равно $a\sqrt{2}$. Назовем две черные и две белые вершины, принадлежащие одной грани меньшего куба, *соответствующими*. Рассмотрим 4 белые вершины. Куб имеет 3 пары противоположных граней, следовательно, по принципу Дирихле какие-то две белые вершины принадлежат одной паре противоположных граней большего (единичного) куба. Возможны два случая.

Случай 1. Две белые вершины оказались в одной грани единичного куба. Тогда две соответствующие им черные вершины принадлежат той же грани единичного куба (иначе одна из черных вершин лежала бы вне большего куба). Более того, эти 4 точки обязаны лежать на

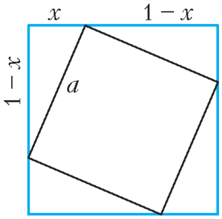


Рис. 13

ребрах большего куба, так как иначе вершины противоположной грани меньшего куба лежали бы строго внутри единичного куба, что противоречит условию задачи. Получаем квадрат со стороной a, вписанный в единичный квадрат (рис.13). Пусть вершины меньшего квадрата разбивают стороны большего на отрезки длин x и $1 - x$. Тогда

$$a^2 = x^2 + (1-x)^2 \geq \frac{1}{2}(x+1-x)^2 = \frac{1}{2},$$

поэтому $a \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Когда x пробегает полуинтервал $\left(0; \frac{1}{2}\right]$, искомая длина a принимает все значения из полуинтервала $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; 1\right)$. При этом все вершины получающегося малого куба будут лежать на гранях единичного куба.

Случай 2. Две белые вершины оказались на разных противоположных гранях единичного куба. Тогда расстояние между ними, равное $a\sqrt{2}$, не меньше 1. Поэтому и в этом случае $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq a < 1$.

11 класс

Второй день

1. -5 или $-3{,}2$.

Пусть $a_1 = b_1 = a \neq 0$, разность арифметической прогрессии равна d, а знаменатель геометрической равен q. Поскольку прогрессии непостоянны, $d \neq 0$ и $q \neq 1$. Возможны два случая.

1) Пусть (a_n) – арифметическая прогрессия, а (b_n) – геометрическая. Тогда по условию получаем $a + d = 2aq$, $a + 3d = 8aq^3$, или $d = a(2q-1)$, $3d = a\left(8q^3 - 1\right) = d\left(4q^2 + 2q + 1\right)$, $2q^2 + q - 1 = 0$, откуда $q = 1/2$ или $q = -1$. Если $q = 1/2$, то $d = a(2q-1) = 0$, что по условию невозможно. Если $q = -1$, то $d = -3a$ и $a_3 : b_3 = \frac{a+2d}{aq^2} = -5$.

2) Пусть теперь (a_n) – геометрическая, а (b_n) – арифметическая прогрессия. Тогда $2(a+d) = aq$, $8(a+3d) = aq^3$, поэтому $2d = a(q-2)$, $24d = a\left(q^3 - 8\right) = 2d\left(q^2 + 2q + 4\right)$, $q^2 + 2q - 8 = 0$, откуда $q = 2$ или $q = -4$. В первом случае снова $d = 0$, что противоречит условию, а во втором $q = -4$, $d = -3a$ и $a_3 : b_3 = \frac{aq^2}{a+2d} = -\frac{16}{5}$.

2. Нет.

Предположим, что такие числа x и y существуют. Тогда они удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \lg(x+y) = \lg x \lg y, \\ \lg(x-y) = \dfrac{\lg x}{\lg y}. \end{cases}$$

Логарифм в левой части второго уравнения определен при $x > y$. Если $0 < y < x \leq 1$, то левая часть второго уравнения отрицательна, а правая часть неотрицательна – получаем противоречие. Если $0 < y < 1$ и $x \geq 1$, то левая часть первого уравнения положительна, а правая часть неположительна, снова противоречие.

Пусть $x > y > 1$. В этом случае все логарифмы положительны. Сложим уравнения системы и применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\lg\left(x^2 - y^2\right) =$$
$$= \lg(x+y) + \lg(x-y) = \lg x \cdot \lg y + \frac{\lg x}{\lg y} \geq$$
$$\geq 2\sqrt{(\lg x)^2} = 2\lg x = \lg x^2.$$

Отсюда $x^2 - y^2 \geq x^2$, что при положительном y невозможно.

Значит, Незнайка не сможет подобрать числа x и y, удовлетворяющие одновременно обоим уравнениям системы.

3. Да, может.

Первый способ. Докажем, что Ниро Вульф заведомо сможет найти преступника за 12 дней. Людей, замешанных в деле, будем называть *подозреваемыми*. Сопоставим каждому из 80 подозреваемых свой упорядоченный набор (a, b, c, d) из четырех не обязательно различных цифр a, b, c и d, каждая из которых может принимать значения 0, 1 или 2. Это возможно, поскольку всего таких различных наборов $3^4 = 81$. Пусть в день расследования под номером k ($k = 1, 2, \ldots, 12$) Ниро Вульф пригласит к себе тех и только тех подозреваемых, набор цифр которых удовлетворяет k-му из равенств: $a = 0$, $a = 1$, $a = 2$, $b = 0$, $b = 1$, $b = 2$, $c = 0$, $c = 1$, $c = 2$, $d = 0$, $d = 1$, $d = 2$. Тогда в один из этих дней он пригласит к себе свидетеля, но при этом не пригласит преступника, так как их наборы отличаются хотя бы в одной цифре. Значит, преступление будет раскрыто за 12 дней.

Второй способ. Покажем, что Ниро Вульф сможет найти преступника даже за 9 дней. Для этого сопоставим каждому подозреваемому свой код – упорядоченный набор из девяти цифр, четыре из которых единицы, а пять нули (это можно сделать, так как всего таких кодов $C_9^4 = 126 > 80$).

Пусть Ниро Вульф в k-й день ($k = 1, 2, \ldots, 9$)

пригласит к себе тех и только тех подозреваемых, k-я цифра кода которых равна 1. Поскольку все коды содержат ровно по 4 единицы, найдется такое число m от 1 до 9, что на m-м месте у свидетеля стоит единица, а у преступника – ноль. Значит, в m-й день свидетель будет приглашен к Ниро Вульфу без преступника, и преступление будет раскрыто.

Комментарий. Пользуясь методом, использованным во втором способе решения, можно показать, что за 12 дней детектив сможет раскрыть дело, если в нем замешаны не более $C_{12}^6 = 924$ подозреваемых.

Более того, эта оценка точная, что вытекает из следующего факта. Пусть A – множество всех подмножеств некоторого n-элементного множества. Рассмотрим такое подмножество B множества A, что никакие два элемента из B не вложены друг в друга (такое подмножество B называется ***антицепью***). Доказанная в 1928 году теорема Шпернера утверждает, что максимальное число элементов, которое может содержать B, равно $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Здесь $\lfloor n/2 \rfloor$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $n/2$.

Из этой теоремы следует, что максимальное число подозреваемых, среди которых заведомо можно выявить преступника за n дней, равно $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$. Действительно, сопоставим каждому из подозреваемых код из нулей и единиц длины n, в котором на k-м месте стоит 1, если в k-й день он был приглашен к Ниро Вульфу, и 0 в противном случае. Такой код однозначно определяет подмножество дней, в которые подозреваемый побывал у детектива. Чтобы дело было раскрыто, в какой-то день свидетель должен побывать у Ниро Вульфа без преступника. Это произойдет, если существует такое число k (k = 1, 2, …, n), что на k-м месте в коде свидетеля стоит 1, а в коде преступника стоит 0. Максимальное число кодов, при котором это можно гарантировать, в соответствии с теоремой Шпернера как раз равно $C_n^{\lfloor n/2 \rfloor}$ (при этом в каждом коде будет ровно $\lfloor n/2 \rfloor$ единиц).

Из полученного результата можно сделать и такой вывод: минимальное число дней, за которое можно заведомо выявить преступника среди 80 подозреваемых, равно девяти, так как за 8 дней преступника можно найти лишь среди не более $C_8^4 = 70$ человек.

4. Без ограничения общности будем считать, что вершины A, B, C треугольника ABC расположены в указанном порядке по часовой стрелке (рис.14). Обозначим через K и L середины отрезков BC и CE соответственно. Тогда $\angle DKC = \angle CLA = 90°$ и $\angle CDK = \angle ACL = 60°$.

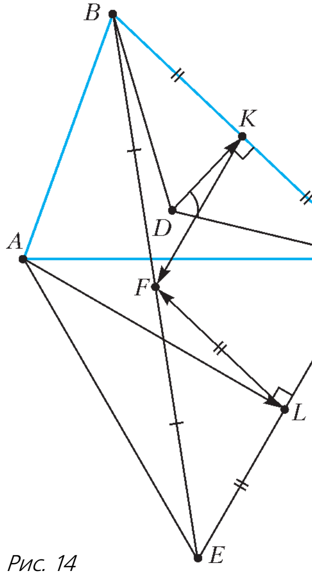


Рис. 14

Следовательно,
$$\frac{CK}{DK} = \frac{AL}{CL} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}.$$
Значит, если вектор $\overrightarrow{DK}$ повернуть на 90° против часовой стрелки, а затем умножить на $\sqrt{3}$, то получится вектор, равный вектору $\overrightarrow{CK}$. Аналогично, если вектор $\overrightarrow{CL}$ повернуть на 90° против часовой стрелки, а затем умножить на $\sqrt{3}$, то получится вектор, равный вектору $\overrightarrow{AL}$. По теореме о средней линии для треугольника BCE имеем $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{LF}$ и $\overrightarrow{KF} = \overrightarrow{CL}$. Поэтому при повороте на 90° против часовой стрелки и последующем умножении на $\sqrt{3}$ вектор $\overrightarrow{DK}$ перейдет в равный вектору $\overrightarrow{LF}$, вектор $\overrightarrow{KF}$ – в равный вектору $\overrightarrow{AL}$. Следовательно, вектор $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{KF}$ при таком преобразовании перейдет в равный вектору $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{LF}$. Значит, векторы $\overrightarrow{DF}$ и $\overrightarrow{AF}$ перпендикулярны, т.е. $\angle AFD = 90°$. Что и требовалось доказать.

5. 2 и 5.

Занумеруем строки (снизу вверх) и столбцы (справа налево) числами от 0 до 2016, а через $a_{i,j}$ обозначим цифру, стоящую на пересечении i-й строки и j-го столбца. При такой нумерации строк и столбцов цифры рассматриваемых чисел, стоящие в младших разрядах, имеют меньший номер строки (столбца).

Если через v_i обозначить число, записываемое цифрами i-й строки, а через w_j – число, записываемое цифрами j-го столбца, то $v_i = \sum_{j=0}^{2016} 10^j a_{i,j}$, $w_j = \sum_{i=0}^{2016} 10^i a_{i,j}$.

Покажем сначала, что описанная в условии задачи ситуация возможна для $p = 2$ и $p = 5$. Пусть, например, $a_{i,j} = 1$ при всех $i, j \geq 1$ (эти цифры можно выбрать и любыми другими), $a_{0,2016} = 1$, а остальные цифры равны p. Тогда все числа, читаемые по строкам и столбцам, кроме w_{2016}, заканчиваются на p и, как следствие, делятся на p, а w_{2016} заканчивается на 1 и поэтому на p не делится.

Теперь докажем, что для всех других p описанная ситуация невозможна. Предполагая противное, рассмотрим величину

$$S = \sum_{i,j=0}^{2016} 10^{i+j} a_{i,j} .$$

С одной стороны, она равна

$$S = \sum_{i=0}^{2016} 10^i \sum_{j=0}^{2016} 10^j a_{i,j} = \sum_{i=0}^{2016} 10^i v_i .$$

С другой стороны, абсолютно аналогично получаем

$$S = \sum_{j=0}^{2016} 10^j w_j .$$

Если все числа v_i, w_j ($i, j = 0, 1, 2, \ldots, 2016$), кроме одного, делятся на p, а оставшееся на p не делится, то в одной из двух последних сумм все слагаемые делятся на p (значит, S делится на p), а в другой сумме все слагаемые, кроме одного, делятся на p, а оставшееся, в силу взаимной простоты p и степеней десятки, на p не делится (значит, S не делится на p). Противоречие.

МОСКОВСКАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 2017 ГОДА

(см. «Квант» №5)

ВТОРОЙ ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

7 класс

1. $v = u\dfrac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = 5$ м/с , $l = \dfrac{v^2 - u^2}{2u}\Delta t_1 = 300$ м .

2. $t_{\min} = \dfrac{19s}{43v} = 95$ с .

3. Скорость быстро движущегося поршня $v_1 = \dfrac{7}{6}v$, а медленно движущегося $v_2 = \dfrac{1}{6}v$.

4. $M \approx 1{,}8$ кг .

8 класс

1. $\rho_{\text{ср}1} = \dfrac{15\rho_1 + 9\rho_2}{24}$, если сначала быстрее движется левый поршень, и $\rho_{\text{ср}2} = \dfrac{9\rho_1 + 15\rho_2}{24}$, если сначала быстрее движется правый поршень.

2. 1) $t_1 = 60$ с , $t_2 = 90$ с , $t_3 = 120$ с ; 2) см. рис.15.

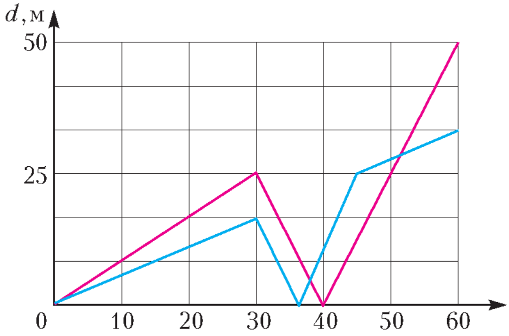


Рис. 15

3. 1) Система может находиться в равновесии при $m < m_0 = \dfrac{F}{g} = 1$ кг . 2) Центр масс неоднородного груза должен находиться на одинаковых расстояниях от нитей, на которых висит этот груз. 3) Сила трения направлена вверх и равна $F_1 = m_1 g = 7$ Н .

4. 1) $m = m_0 \dfrac{(W_1 + W_2)/0{,}8}{Q} \approx 154$ кг/с ;

2) $\eta = \dfrac{W_1}{(W_1 + W_2)/0{,}8} \cdot 100\% \approx 17{,}85\%$;

3) $M = \dfrac{0{,}3 \cdot 0{,}8 W_1/(\eta/100\%)}{L} \approx 816{,}5$ л/с ;

4) $W \approx 1974$ МВт .

9 класс

1. 1) Скорость квадрокоптера равна $u = v\sin\alpha = \dfrac{v}{2}$ и направлена на запад под углом 30° к горизонту (рис. 16). 2) Скорость равна $u = \dfrac{v}{\sqrt{3}}$ и направлена на запад под углом 60° к горизонту.

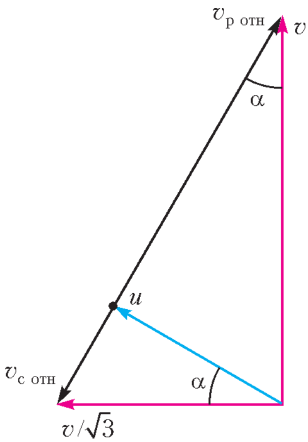


Рис. 16

2. 1) Глубина погружения правого кубика уменьшится на $\Delta h = \dfrac{2ma}{5M} = \dfrac{a}{40}$;

2) $\Delta F_{\text{н}} = \dfrac{mg}{5} = \dfrac{Mg}{80}$, $\Delta Fg = \dfrac{2mg}{5} = \dfrac{Mg}{40}$;

3) $m < \dfrac{5}{16}M$.

3. $\dfrac{v_{\text{В}}}{v_{\text{П}}} = \dfrac{c(\rho_{\text{л}} + 3\rho_{\text{в}})t_2 + \lambda\rho_{\text{л}}}{c(\rho_{\text{л}} + 3\rho_{\text{в}})t_1 + \lambda\rho_{\text{л}}} \approx 1{,}85$.

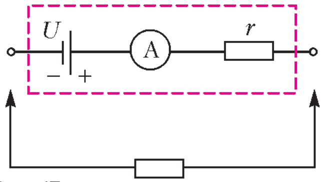


Рис. 17

4. $R_3 = 800$ Ом, $R = 500$ Ом (схема омметра показана на рисунке 17).

10 класс

1. $s_{\max} = \dfrac{u}{v}\dfrac{L}{2}$ при $u < \sqrt{2}v$ и $s_{\max} = L\sqrt{1-\left(\dfrac{v}{u}\right)^2}$ при $u \geq \sqrt{2}\,v$.

2. $Q = m\left(gH + \dfrac{v^2}{3}\right)$ (воспользуйтесь законом изменения механической энергии и законом сохранения импульса в проекции на горизонтальное направление).

3. Потенциальная энергия системы уменьшилась на $\Delta E_{\text{п}} = \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)\dfrac{\rho g L a^3}{2} \approx 71{,}5 \cdot 10^{-3}$ Дж.

4. Для того чтобы в состоянии *3* достигалась максимальная температура газа за весь цикл, необходимо, чтобы в этой точке изотерма касалась графика процесса *3–1*. Это возможно при том условии, что давление в состоянии *3* не меньше некоторого минимального значения $p_{3\min}$. Рассмотрим произвольный линейный процесс, изображенный на рисунке 18, при некотором

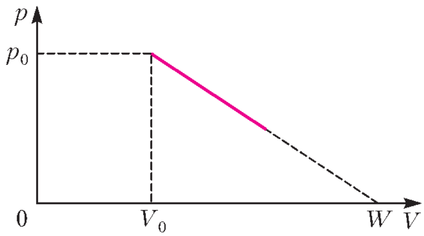


Рис. 18

$V_0 < W$, и найдем, при каких условиях температура газа в этом процессе повышается или понижается. Запишем уравнение процесса:

$$p(V) = p_0\frac{W-V}{W-V_0}.$$

Для малого участка процесса, на котором газ расширяется от объема V до $V+\Delta V$, давление изменяется от p до $p+\Delta p$, причем

$$\Delta p = -\frac{p_0}{W-V_0}\Delta V.$$

Отсюда, с учетом уравнения состояния $pV = \nu RT$, получаем

$$\nu R\Delta T = p\Delta V + V\Delta p = p_0\frac{W-2V}{W-V_0}\Delta V.$$

Следовательно, температура газа повышается $(\Delta T > 0)$ при $V < W/2$ и понижается $(\Delta T < 0)$ при $V > W/2$, т.е. изотерма касается графика рассматриваемого линейного процесса в точке A, которая соответствует объему $W/2$ (рис.19). Заметим, что треугольник $0AW$ равнобедренный.

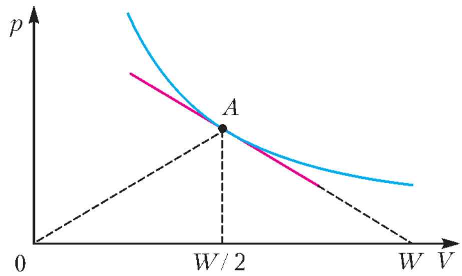


Рис. 19

Пусть точка *3* соответствует минимально возможному значению давления $p_{3\min}$, причем в этой точке изотерма касается графика процесса *3–1*. Тогда (рис.20) треугольник $03W$ равнобедренный, $W = 2V_3$ и $V_4 = W - V_1 = 2V_3 - V_1$.

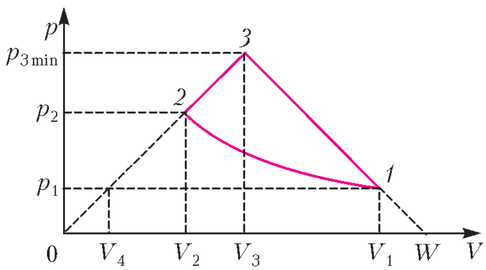


Рис. 20

Так как процесс *1–2* изотермический и участок *2–3* представляет собой прямую пропорциональную зависимость, то

$$p_1V_1 = p_2V_2 \quad\text{и}\quad \frac{p_1}{V_4} = \frac{p_2}{V_2},$$

откуда

$$\frac{V_1}{V_4} = \frac{p_2^2}{p_1^2} \quad\text{и}\quad \frac{2V_3 - V_4}{V_4} = \frac{p_2^2}{p_1^2}.$$

Следовательно,

$$\frac{V_3}{V_4} = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2p_1^2},$$

и окончательно получаем

$$p_3 \geq p_{3\min} = \frac{V_3}{V_4}p_1 = \frac{p_1^2+p_2^2}{2p_1}.$$

11 класс

1. $t = 5T_1 = 5\dfrac{\pi\left(4L^2 - D^2\right)}{vL} = \dfrac{144\pi}{65}$ с ≈ 7 с (конус должен сделать целое число оборотов вокруг своей оси симметрии за время, кратное периоду T_1 обращения конуса вокруг вертикальной оси, проходящей через его вершину).

2. 1) $u = v + \dfrac{2qE}{m\omega} = 3$ м/с (такая скорость достигается в том случае, если векторы начальной скорости и изменения импульса частицы совпадают по направлению, а модуль вектора изменения импульса максимален).

2) $\beta = \arcsin\left(\dfrac{2qE}{mv\omega}\cos\dfrac{\pi - \omega\tau}{2}\right) =$

$= \arcsin\left(\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{4}\right) \approx 0{,}124$ рад $\approx 7°$.

3) $\tau_0 = \dfrac{\pi}{\omega} = \dfrac{\pi}{2}$ с $\approx$ 1,57 с;

$\beta_0 = \arcsin\dfrac{2qE}{mv\omega} = \arcsin\dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$ рад $= 30°$.

4. 1) $T_2 = T_1 + \Delta T = T_1 + \left(1 - \dfrac{2}{3}(n-1)\right)T_1 = 290$ К (при этой температуре наличием водяных паров в цилиндре можно пренебречь).

2) $p_2 = p_1 + \Delta p_1 = p_1 + (-0{,}1p_1) = 3{,}6$ кПа.

3) Нет, неверно (количества теплоты, которое выделится при конденсации части пересыщенного пара, не хватит для соответствующего нагревания оставшегося пара и аргона).

5. Пусть потенциал первой точки равен нулю. Заметим, что потенциалы вершин многоугольника образуют арифметическую прогрессию:

$$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = U_0,\ \varphi_3 = 2U_0, \ldots, \varphi_N = (N-1)U_0 .$$

Обозначим потенциал точки S через φ_S. Определив этот потенциал, мы решим задачу.

Первый вольтметр показывает (без учета знака) $U_1 = \varphi_S - \varphi_1$, а десятый – $U_{10} = \varphi_S - \varphi_{10}$. Разность показаний этих вольтметров равна

$$\Delta U = U_1 - U_{10} = \varphi_{10} - \varphi_1 = 9U_0 .$$

Для тока, текущего через k-й вольтметр, справедливо равенство

$$i_k = \frac{\varphi_k - \varphi_S}{R_V} .$$

Если ток положительный – он втекает в узел S, где соединяются все вольтметры. Если отрицательный, то наоборот – истекает из этого узла. Очевидно, сумма всех этих токов должна быть равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{2017} i_k = 0 \text{, откуда следует } \sum_{k=1}^{2017} \varphi_k = 2017\varphi_S .$$

В левой части последнего равенства стоит сумма арифметической прогрессии, которая равна

$$\sum_{k=1}^{2017} \varphi_k = 2016U_0 \cdot \frac{2017}{2} .$$

Теперь можно определить потенциал точки S:

$$\varphi_S = 1008U_0 .$$

Таким образом, первый вольтметр показывает $1008U_0$, второй показывает $1007U_0$ и т.д. (знак мы здесь не учитываем, так как считаем, что каждый вольтметр подключен в нужной полярности). Для показаний N-го вольтметра справедлива формула

$$U_N = \left|(N - 1009)U_0\right| .$$

Итак: 1) $\Delta U_{1-10} = 9U_0$;
2) $U_N = \left|(N - 1009)U_0\right|$; 3) $N_0 = 1009$.

КВАНТ 12+

НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов, А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов, В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан

НОМЕР ОФОРМИЛИ

В.А.Аткарская, Д.Н.Гришукова, А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина

ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

Е.В.Морозова

КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

М.Н.Грицук, Е.А.Митченко

Журнал «Квант» зарегистрирован в Комитете РФ по печати. Рег. св-во ПИ №ФС77–54256

Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №

Адрес редакции:

119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант»

Тел.: (495) 930-56-48

E-mail: math@kvant.ras.ru, phys@kvant.ras.ru

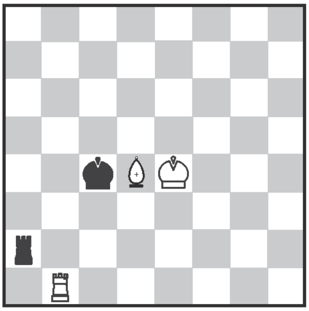
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт», г.Тверь www.Pareto-print.ru

Эндшпиль без пешек

У большинства шахматистов эндшпиль ассоциируется в первую очередь с пешками. И именно умелое управление шахматными пехотинцами, как правило, приносит победу в заключительной стадии игры. Тем не менее, иногда шахматная партия приходит к окончаниям, в которых пешки отсутствуют. Чтобы уметь ориентироваться в таких окончаниях, нужно знать основные приемы. Их мы и разберем.

М.Карлсен–Динь Лижень

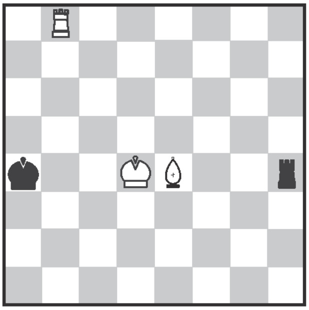
Вейк-ан-Зее, 2016



На практике чаще всего возникает эндшпиль ладья + слон против ладьи. Теоретически он всегда ничеен, но требует большой точности от защищающейся стороны. Позиция на диаграмме возникла в недавней партии действующего чемпиона мира. 57… ♜e2+ 58. ♗e3 ♜c2! Для достижения ничьей король с ладьей должны стоять через клетку друг от друга по полям цвета, противоположного цвету слона. Белые могут разрушить эту стойку, но не способны предотвратить ее новое появление. 59. ♖b8 ♚c3 60. ♖c8 ♚b3 61. ♗c5 ♚c4 62. ♖c7 ♚c3 63. ♔d5 ♚d3 64. ♖h7 ♜e2 65. ♖h3 ♚c2. Стойка повторилась на другой линии. 66. ♔c4 ♜e4 67. ♗d4 ♚d2 68. ♖h2 ♜e2 69. ♖h4 ♜g2 70. ♖e4 ♜e2 71. ♗c3 ♚d1 72. ♖f4 ♚c2 73. ♖d4 ♜f2 74. ♖d3 ♜e2 75. ♗d4 ♜e4 76. ♖a3 ♜e2 77. ♗e3 ♚d1 78. ♖d3. На 78. ♔d3 черные ответили бы ♜d2+, и ладью нельзя было бы брать из-за пата. В этом ресурсе заключается основная идея защиты черных. Поэтому если у вас в партии возникло положение ладья + слон против ладьи и пешки, причем пешка не представляет опасности, то не торопитесь ее съедать, так как при ее наличии на доске подобная патовая идея уже не сработает. 78… ♚e1 79. ♖c3 ♚f1 80. ♔d3 ♜a2 81. ♖c1+ ♚g2 82. ♔e4 ♚g3 83. ♖c8 ♜g2 84. ♖f8 ♚g4. Снова стойка 85. ♗f2 ♜h3 86. ♔f3 ♜g3+! с уже знакомой патовой идеей. Чемпион мира еще некоторое время пытался играть на победу, но в итоге на 98 ходу соперники согласились на ничью.

Н.Роджерс–М.Ильескас

Испания, 1996



Позиция на диаграмме типична для защиты Кохрена – способа обороны слабейшей стороны, разработанного в XIX веке. шотландским шахматистом Д.Кохреном. Основная идея – связать слона с целью не дать королю сильнейшей стороны приблизиться к своему визави. Защита хорошо работает в центре доски, однако неэффективна на краю. Для успешной защиты нужно, чтобы ладья связывала слона на одной из ближних к центру линий (вертикали c-f, горизонтали 3-6) и между королями было как минимум две линии.

78. ♔d5 ♚a3 (78. ♔d3 ♚a5). Король должен двигаться в противоположную сторону от своего коллеги. 79. ♗d3 ♜b4 80. ♖h8 ♜g4 81. ♗c4 ♚b4 82. ♗e2 ♜g7. Важно располагать ладью так, чтобы она могла шаховать и по горизонтали, и по вертикали. 83. ♖b8+ ♚c3 84. ♖c8+ ♚d2 85. ♗f3 ♚e3 86. ♖c3+ ♚d2 87. ♖a3 ♜d7+ 88. ♔c4 ♜c7+ 89. ♔d4 ♜d7+ 90. ♗d5 ♜d8 91. ♖a2+ ♚d1. Позиция повторилась на другом краю доски. Как и в предыдущем примере, белые могут разрушить правильное защитное положение, но не могут предотвратить его повторное появление. 92. ♔e4 ♚c1 93. ♗c4 ♜d2 94. ♖a8 ♜d7 95. ♗d3 ♚b2 96. ♖b8+ ♚c3 97. ♖c8+ ♚b4 98. ♗c4 ♜h7 99. ♗e6 ♜h4+ 100. ♔d5 ♜h5+ 101. ♔d6 ♜h6, сохраняя связку. 102. ♖c4+ ♚a3 103. ♖c3+ ♚b2 104. ♖g3 ♚c2 105. ♔e5 ♜h8 106. ♗f5+ ♚d2 107. ♖a3 ♜e8+ 108. ♔f4 ♜f8 109. ♖d3+ ♚c1 110. ♖d5 ♚b2 111. ♔e3 ♚c3 112. ♗e4 ♜h8 113. ♖c5+ ♚b4 114. ♔d4 ♜h4. Позиция Кохрена повторилась в третий раз. Ничья.

Подобный способ защиты также эффективен в случае, если на доске вместо слона находится конь.

А.Русанов

Индекс 90964

Явление сверхпроводимости было открыто более 100 лет назад.
А сегодня с ним можно столкнуться не только в научной лаборатории,
но и ... в вагоне скорого поезда.